SOBRE LOS ESPACIOS ECARTIZADOS REGULARES α.

por MANUEL BALANZAT [1]

M. Fréchet [2] ha definido una clase de espacios abstractos, los espacios ecartizados, más generales que los espacios métricos, y que se obtienen reemplazando el número real que expresa la distancia entre dos puntos de un espacio métrico, por un *ecart abstracto,* es decir, por un elemento de un conjunto ordenado cualquiera. Los espacios así obtenidos son efectivamente más generales que los espacios métricos [3] y conservan bastantes propiedades de estos últimos; en particular se prestan a una extensión del concepto de continuidad uniforme.

La extensión de la continuidad uniforme a espacios más generales que los métricos fué realizada por primera vez por A. Weil [4]. El método de M. Fréchet consigue la obtención de dichos resultados por un camino más natural e intuitivo, de forma que las demostraciones obtenidas son la extensión natural de las demostraciones clásicas en el caso de la recta euclidiana; en particular no hay necesidad de introducir el espacio producto, que es esencial en la teoría de Weil, y que no se presentaba

---

(1) Un resumen de los resultados de la presente nota fué presentado al Congreso del año 1947 de la "Association Française pour l'avancement des Sciences".

(2) M. FRÉCHET, *De l'écart numérique à l'écart abstrait* ("Portugaliae Mathematica", vol. 5, 1946, págs. 121-131).

(3) M. BALANZAT, *Sur la formation des espaces à écart régulier et symétrique* (La Revue Scientifique, nº 3288, 1948, pág. 34).

(4) A. WEIL, *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale* (Actualités scientifiques et industrielles, nº 551, Editorial Hermann, París, 1937).

en las demostraciones anteriores sobre continuidad uniforme en los espacios métricos.

Un espacio ecartizado queda definido por un conjunto de elementos, los puntos del espacio, y un conjunto ordenado, la *escala* de écarts, de forma tal que a cada par de puntos a, b del espacio corresponda un elemento de la escala $\xi = (a, b)$. Para obtener una generalización de las condiciones impuestas a la distancia en el caso de los espacios métricos se supone que la escala tiene un primer elemento 0 y carece de segundo elemento. Entonces se establece que $(a, b) = 0$, si y sólo si $a = b$. Como en el caso de los espacios métricos la condición de simetría es $(a, b) = (b, a)$.

Un esferoide de centro a (punto del espacio) y radio ξ (elemento de la escala) es, naturalmente, el conjunto de puntos x del espacio que cumplen la condición $(a, x) \leqq \xi$(5). La topología se establece diciendo que un punto a es de acumulación de un conjunto E, si todo esferoide de centro a contiene algún punto de E distinto de a.

Una sucesión u_ξ de puntos del espacio (es decir tal que a todo elemento ξ de la escala corresponda un punto u_ξ del espacio) converge hacia un punto a cuando ξ tiende a 0, si fijado un $\eta > 0$ de la escala existe un $\omega > 0$ de la misma tal que si $\xi \leqq \omega$, $(a, u_\xi) \leqq \eta$. Es claro que la condición necesaria y suficiente para que un punto a sea de acumulación de un conjunto E es qúe exista una sucesión de puntos de E, distintos de a, y convergente hacia a.

Para generalizar la condición triangular de la distancia en el caso de los espacios métricos, M. Fréchet introduce las condiciones que él denomina de *regularidad*.

Un espacio ecartizado se dice que es regular α), β), γ) o δ) si las condiciones que siguen son verificadas:

Se puede definir una transformación $\eta = \varphi(\xi)$ de todo elemento ξ de la escala en otro η de la misma que converge hacia 0 con ξ y tal que cualesquiera que sean los puntos distintos x, y, z del espacio, las condiciones

(5) El signo $<$ está tomado acá en el sentido amplio de preceder; $a < b$, o $b > a$ significa que en un conjunto ordenado el elemento a precede al b o, lo que es lo mismo, que b sigue a a. Si el conjunto es de números reales, ordenado de menor a mayor, el signo $<$ toma entonces su significado clásico.

$$\alpha)\quad (x, y) \leqq \xi;\quad (y, z) \leqq \xi$$

$$\beta)\quad (y, x) \leqq \xi;\quad (y, z) \leqq \xi$$

$$\gamma)\quad (x, y) \leqq \xi;\quad (z, y) \leqq \xi$$

$$\delta)\quad (y, x) \leqq \xi;\quad (z, y) \leqq \xi$$

implican necesariamente

$$(x, z) \leqq \varphi(\xi).$$

Un espacio es regular si es a la vez regular α), β), γ) y δ). Es claro que si se cumple la condición de simetría, las cinco clases de regularidad son equivalentes.

* * *

M. Fréchet ha demostrado que en el caso en que el écart sea regular β), γ) o δ), se puede, sin alterar la topología, reemplazar dicho écart por otro simétrico y regular, es decir, que desde el punto de vista topológico, la regularidad y las regularidades β), γ) y δ) son equivalentes. La regularidad α) es entonces la única que puede ser topológicamente más general que las otras; en la memoria citada, M. Fréchet dejó sin resolver el problema de ver si efectivamente la regularidad α) es topológicamente más general. Nosotros vamos a resolver por la afirmativa eeste problema, es decir, que vamos a demostrar que: *la condición de regularidad α) es efectivamente más general, desde el punto de vista topológico, que las otras condiciones de regularidad.*

Para ello utilizaremos el hecho de que en un espacio regular (basta que sea regular γ)), una sucesión a_ξ de puntos no puede tener más de un punto límite. En efecto: si tuviera dos x e y, dado un η de la escala existe un ω de la misma tal que para $\xi \leqq \omega$ se tiene

$$(x\, a_\xi) \leqq \eta \quad (y\, a_\xi) \leqq \eta$$

y por la condición de regularidad

$$(x, y) \leqq \varphi(\eta).$$

Cuando η tiende hacia 0, $\varphi(\eta)$ tiende hacia 0, luego (x, y) precede a cualquier elemento de la escala, es decir $(x, y) = 0$ y, por lo tanto, $x = y$.

Por consiguiente, para demostrar nuestro resultado bastará dar *un ejemplo de un espacio regular* α) *en el cual una sucesión de puntos tenga varios puntos límites*, puesto que no se podrá, sin cambiar la topología, reemplazar el écart regular α) por uno regular.

Vamos ahora a definir un tal espacio:

El conjunto de sus puntos está constituído por:

1) Los números reales no naturales, que designaremos por las letras $a, b, \ldots$

2) Los números transfinitos de las clases I y II, que designaremos por las letras $\alpha, \beta, \ldots$

La escala está formada por los números trasfinitos de las clases I y II considerados en orden inverso y aumentados de un primer elemento 0.

Definiremos el écart de la manera siguiente:

$$(a, b) = 1; \quad (a, \alpha) = \alpha; \quad (\alpha, a) = 1; \quad (\alpha, \beta) = 1$$

e igual a 0 si los dos elementos coinciden.

Vamos a probar la regularidad α) del espacio considerando la función $\varphi(\xi) = \xi$, es decir, probando que si $(x, y) \leqq \xi$ e $(y, z) \leqq \xi$ se verifica siempre que $(x, z) \leqq \xi$.

Si de los tres puntos distintos x, y, z, x es un número transfinito, entonces $(x, y) = 1$, y como 1 es el último elemento de la escala, forzosamente cualquiera que sea z, tendremos $(y, z) \leqq 1$ y $(x, z) \leqq 1$; la regularidad se verifica. Análogamente si x e y son los dos números reales no naturales.

Consideremos ahora el caso en que x sean un número entero no natural a e y un número transfinito α:

Si z es un número transfinito β tendremos

$$(a, \alpha) = \alpha \quad (\alpha, \beta) = 1 \quad (a, \beta) = \beta$$

y si z es un número real no natural b tendremos

$$(a, \alpha) = \alpha \quad (\alpha, b) = 1 \quad (a, b) = 1$$

En todos los casos se cumple la condición, luego el espacio es regular α.

Consideremos la sucesión de puntos del espacio $u_\xi = \xi$ es decir que, a cada índice, número transfinito, de la escala le corresponde el mismo número transfinito, pero considerado como punto del espacio.

Si a es cualquier número real no natural, entonces dado un η de la escala, si

$$\xi \leqq \eta \quad \text{entonces} \quad (a, u_\xi) = \xi \leqq \eta = (a, u_\eta);$$

luego a es punto límite de la sucesión y como ello se aplica a cualquier punto, deducimos que la sucesión u_ξ tiene como puntos límites todos los números reales no naturales, con lo que queda probado el resultado que queríamos demostrar.

* * *

Consideremos un espacio ecartizado en el que no se pueda, sin alterar la topología, introducir un écart numérico. Se puede demostrar (M. Fréchet, loc. cit.) que si se adoptan las definiciones ordinarias de conjuntos compactos y separables, *todo conjunto compacto tiene un número finito de puntos y todo conjunto separable es numerable.*

Si el écart es numérico, en el caso en que sea regular, el espacio es, por el teorema de Chittenden, metrizable y ya sabemos que entonces los conjuntos compactos o separables no son forzosamente finitos o numerables. Esta propiedad de los espacios métricos subsiste en el caso de los espacios con un écart numérico regular α), como lo vamos a probar ahora, al mismo tiempo que estableceremos algunas diferencias entre estos espacios y los métricos.

Comenzaremos por dar un ejemplo de un *espacio ecartizado numéricamente, no metrizable, regular* α) *y con conjuntos compactos no finitos.*

Los puntos del espacio están formados por dos conjuntos numerables cualesquiera

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

La escala es el conjunto de las fracciones $\frac{1}{n}$ ordenado de menor a mayor y conteniendo el cero como primer elemento. El écart queda definido de la manera siguiente:

$$(a_n, a_p)=1; \quad (a_n \alpha_p)=1; \quad (\alpha_n, a_p)=\frac{1}{p}; \quad (\alpha_n, \alpha_p)=1 \text{ (si } n>p);$$

$$(\alpha_n, \alpha_p)=\frac{1}{n+p} \text{ si } n<p, \text{ e igual a cero si los puntos coinciden.}$$

Probaremos que el espacio es regular α) considerando la función $\varphi(\varepsilon)=\varepsilon$, es decir, probando que si $(x, y) \leqq \varepsilon$ e $(y, z) \leqq \varepsilon$ se verifica que $(x, z) \leqq \varepsilon$.

Cuando x es un punto a_n, $(x, y)=1$; cuando y es un a_n, $(y, z)=1$; luego para probar la regularidad bastará considerar el caso en que $x=\alpha_n$ e $y=\alpha_p$ y además $n<p$. Si $z=a_q$, tendremos

$$(x, y)=\frac{1}{n+p}; \quad (y, z)=\frac{1}{q}; \quad (x, z)=\frac{1}{q}$$

luego se verifica la condición.

Si $z=\alpha_q$ y si $q<p$, entonces $(y, z)=1$; basta con estudiar el caso $n<p<q$; tendremos entonces:

$$(x, y)=\frac{1}{n+p}; \quad (y, z)=\frac{1}{p+q}; \quad (x, z)=\frac{1}{n+q}$$

y como $n+p<n+q$, $(x, y)>(x, z)$, luego en todos los casos se cumple la condición de regularidad α).

Sea E un conjunto infinito del espacio; si contiene infinitos puntos a_n, entonces dado un ε cualquiera existirá un punto a_m del conjunto tal que $(\alpha_r, a_m)=\frac{1}{m}<\varepsilon$ para cualquier punto α_r; si E contiene infinitos puntos α_n, entonces dado un α_r cualquiera, existe siempre un α_m del conjunto con m suficientemente grande para que $m>r$ y $(\alpha_r \alpha_m)=\frac{1}{r+m}<\varepsilon$, cualquiera que sea ε. Es decir que cualquier conjunto finito tiene como conjunto de puntos de acumulación el conjunto de los α_n. *El espacio es pues compacto.*

De acá se deduce que si consideramos un conjunto E que contenga infinitos puntos α_n, sin contenerlos a todos, obtendremos un *conjunto compacto en sí y no cerrado,* propiedad que distingue este espacio de los métricos.

Igualmente si consideramos el conjunto de los a_n obtenemos *un conjunto infinito de un espacio compacto en el que los écarts mutuos entre dos puntos cualesquiera son todos iguales a* 1, propiedad que no puede encontrarse nunca en un espacio métrico.

Finalmente haremos notar que este ejemplo nos suministra otra prueba (limitada al caso del écart numérico) de la mayor generalidad, desde el punto de vista topológico, de la regularidad α).

Pasemos ahora al caso de los conjuntos separables y vamos a dar un ejemplo de *un espacio ecartizado numéricamente, regular* α), *no metrizable y con conjuntos separables no numerables.*

Los puntos del espacio son los siguientes:

1) Los puntos irracionales $(0<x<1)$ del eje OX del plano que designaremos con las letras $a, b, \ldots$

2) Los puntos irracionales $(0<x<1)$ de las rectas de ecuación $y=n$; $(n=1,2,\ldots)$; estos puntos serán designados por las letras $A_n, B_p, \ldots$ en las que el índice indicará la ordenada de la recta a que pertenecen; convendremos en que los puntos $a, A_n, A_p, \ldots$ tienen siempre una misma abcisa, y por lo tanto los puntos $a, B_n, C_n, \ldots$ tienen abcisas diferentes.

3) Los puntos racionales $(0\leqq x\leqq 1)$ del eje OX del plano, designaremos estos puntos por las letras $\alpha, \beta, \ldots$

La escala es el conjunto de los números reales del segmento $(0\leqq x\leqq 1)$ ordenado de menor a mayor. El écart se define de la manera siguiente:

$$(a, A_n)=\frac{1}{n}; \quad (a, \alpha)=|a-\alpha|; \; |A_n, \alpha|=|a-\alpha|,$$

igual a cero si los dos puntos coinciden y a uno en todos los otros casos.

Probaremos la regularidad α) de la misma forma que en el ejemplo anterior, es decir, estableciendo que si $(x, y)<\varepsilon$ e $(y, z)<\varepsilon$ se tiene siempre $(x, z)<\varepsilon$.

Observaremos que $(x,y)=1$, salvo en los tres casos $x=a$, $y=A_n$; $x=a$, $y=\alpha$; $x=A_n$, $y=\alpha$. Pero en los dos últimos casos es siempre $(y,z)=1$, luego sólo hay que estudiar el primero y en éste $(y,z)\neq 1$, sólo cuando $z=\alpha$. Todo se reduce pues a estudiar el caso $x=a$; $y=A_n$; $z=\alpha$. En este caso tenemos $(x,y)=\frac{1}{n}$; $(y,z)=|a-\alpha|$; $(x,z)=|a-\alpha|$ es decir $(x,z)=(y,z)$, luego queda probada la regularidad α) del espacio.

De la definición del écart se deduce que si consideramos el conjunto numerable de los puntos racionales del eje OX, este conjunto tiene como puntos de acumulación el conjunto de los restantes puntos del espacio; éste es por consiguiente *no numerable y separable.*

El conjunto de los puntos irracionales de las rectas $y=n$, es un *conjunto de puntos no numerable y tal que los écarts mutuos entre dos puntos cualesquiera del conjunto son todos iguales a* 1, resultado que sabemos es imposible en un espacio métrico y separable.

Finalmente haremos observar que este espacio presenta igualmente otra propiedad que lo distingue de los métricos; dicha propiedad es que *el espacio es separable pero no perfectamente separable.*

Como ya hemos visto que es separable sólo nos queda por probar que no es perfectamente separable.

Sea $\{W\}$ una familia de entornos equivalente topológicamente a la familia $\{V\}$ de los esferoides.

Sea a un punto irracional del eje OX y $V(a,n)$ el esferoide definido por la condición $(a,x)\leqq\frac{1}{n}$; dicho esferoide contiene únicamente puntos racionales del eje OX y puntos irracionales de las rectas $y=n$ de la misma abcisa que a.

Por la equivalencia topológica supuesta de ambas familias tiene que haber un entorno $W(a,n)$ contenido en el esferoide $V(a,n)$ y que por consiguiente sólo puede tener puntos de los contenidos en dicho esferoide; pero como el punto a es punto de acumulación del conjunto de todos los A_n, se ve que $W(a,n)$ contiene forzosamente puntos del tipo A_n, es decir, puntos de abcisa a.

Dos entornos $W(a,n)$ y $W(b,n)$ correspondientes a puntos distintos del eje OX tiene que ser forzosamente diferentes, ya que el primero sólo contiene, y contiene seguramente, puntos de las rectas $y=n$ de abcisa igual a a, y el segundo de abcisa igual a b.

Luego de cualquier familia $\{W\}$ equivalente topológicamente a la familia de los esferoides se puede extraer un conjunto $W(a,n)$ de entornos distintos en correspondencia biunívoca con los puntos irracionales del segmento $(0 \leqq x \leqq 1)$, luego dicha familia no puede ser numerable y por consiguiente el espacio no puede ser perfectamente separable.

CRONICA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

REUNION DEL 7 DE JULIO DE 1948

El 7 de julio se reunió la Unión Matemática Argentina en el Instituto de Matemática de la Universidad de Buenos Aires.

Fueron expuestos los siiguientes trabajos:

1. M. Cotlar: *Caracterización de operadores de Koopman.*
2. R. A. Ricabarra: *Medidas transitivas en espacios compactos.*
3. Dietrich Völker: *Sobre el producto de integrales dobles de Laplace.*
4. Kurt Fränz: *Relaciones entre señales y espectros.*

Quedaron postergados para la próxima reunión los trabajos de J. C. Vignaux, O. A. Varsavsky y P. Pi Calleja, así como el de A. González Domínguez, titulado ''Aplicaciones de la delta completa a la electrodinámica cuántica de Schwinger''.

A continuación se leyó un informe de Secretaría, dándose cuenta del homenaje tributado al Prof. Zygmund, de la intensificación del intercambio científico, de la invitación al Congreso Internacional de Matemáticos de 1950, de la inclusión de la Unión Matemática Argentina en los registros de la Unesco, de la representación de la UMA en las jornadas de Epistemología e Historia de la Ciencia delegada en el Dr. M. Valentinuzzi y de igual representación en el Congreso Italiano de Matemática delegada en el Prof. A. Terracini residente actualmente en Italia. Se dejó constancia del agradecimiento enviado al Arq. Julio V. Otaola por su apoyo prestado a las actividades matemáticas desde su cargo oficial en la Universidad de Buenos Aires.

Se rindió luego un homenaje al Ing. Manuel Guitarte, fallecido a comienzos de este año, destacando el Dr. González Domínguez la actuación del Ing. Guitarte como socio fundador y presidente de la UMA.

A continuación el Dr. González Domínguez se refirió a la invitación reci-