# PROPAGACION DE ONDAS ELECTROMAGNETICAS EN LA GUIA AXIAL EXCENTRICA

por José A. Balseiro

Instituto de Física – La Plata

(Recibido el 7-11-1949)

Summary. – The formal solution for electromagnetic waves propagating between two eccentrical cylinders of infinite conductivity is given in terms of the propagation modes of the coaxial guide. A first approximation for the case of small eccentricities is discussed, and the propagation factor is obtained in terms of the eccentricity.

1. - *Introducción.* — Trataremos las soluciones de las ecuaciones de Maxwell correspondientes a la propagación de ondas entre dos cilindros de conductividad infinita y no concéntricos, en el caso que el cilindro interior contiene el centro del exterior (1).

La solución en el caso general puede ser expresada como una superposición de los modos correspondientes a la guía coaxial, pudiendo ser satisfechas las condiciones de contorno mediante una superposición de modos eléctricos ($E$) o magnéticos ($H$) indistintamente. El campo en este tipo de guía es, pues, transversal sea respecto del vector magnético, sea respecto del vector eléctrico. Existe, también en este caso la solución fundamental para la cual $E_z = E_\varphi = 0$, que coincide con la correspondiente a la guía coaxial.

En el caso de excentricidades grandes el cálculo del factor de propagación requiere la determinación de las raíces de una ecuación trascendente de infinitos términos. Sin embargo, tratándose de pequeñas excentricidades correspondientes a errores acci-

(1) El Prof. Kurt Fränz nos ha comunicado que ha tratado este mismo problema resolviendo en forma aproximada la ecuación de ondas expresada en coordenardas bipolares con el método variacional de Ritz.

dentales o de construcción de las guías coaxiales se puede hallar la solución en primera aproximación, pudiéndose aplicar el mismo método para la determinación de aproximaciones superiores.

Los modos de propagación en una guía coaxial están dados por las soluciones particulares de las ecuaciones de Maxwell en coordenadas cilíndricas $z, \rho, \varphi$:

Ondas eléctricas ($E$):

$$E_z = \alpha^2 Z_n(\alpha\rho)\, e^{in\varphi} \,.\, F \qquad H_z = 0$$

$$E_\rho = -ih\,\alpha\, Z'_n(\alpha\rho)\, e^{in\varphi} \,.\, F \qquad H_\rho = -\frac{k}{h} E_\varphi$$

$$E_\varphi = -ih\,\frac{n}{\rho}\, Z_n(\alpha\rho)\, e^{in\varphi} \,.\, F \qquad H_\varphi = \frac{k}{h} E_\rho$$

significando $Z'_n(\alpha\rho)$ la derivada de $Z_n(\alpha\rho)$ respecto del argumento $(\alpha\rho)$.

Ondas magnéticas ($M$):

$$H_z = \alpha^2 Z_n(\alpha\rho)\, e^{in\varphi} \,.\, F \qquad E_z = 0$$

$$H_\rho = -ih\,\alpha\, Z'_n(\alpha\rho)\, e^{in\varphi} \,.\, F \qquad E_\rho = \frac{k}{h} H_\varphi$$

$$H_\varphi = -ih\, Z_n(\alpha\rho)\, e^{in\varphi} \,.\, F \qquad E_\varphi = -\frac{k}{h} H_\rho .$$

Siendo:

la función cilíndrica $Z_n(\alpha\rho) = A\, J_n(\alpha\rho) + B\, N_n(\alpha\rho)$

$$F = e^{i(kct - hz)}$$

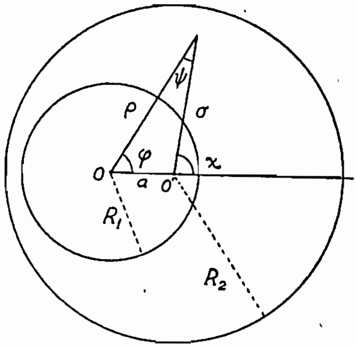
$\alpha^2 = k^2 - h^2$ $\qquad$ $h$, factor de propagación.

Las condiciones de contorno se expresan, para las ondas ($E$) $Z_n(\alpha R_1) = Z_n(\alpha R_2) = 0$ y $Z'_n(\alpha R_1) = Z'_n(\alpha R_2) = 0$ para las ondas ($H$). El factor de propagación queda determinado por estas condiciones mediante las raíces de la ecuación:

$$\text{para } (E) \quad J_n(\alpha R_1)\, N_n(\alpha R_2) - J_n(\alpha R_2)\, N_n(\alpha R_1) = 0 \tag{1.1}$$

$$\text{para } (H) \quad J'_n(\alpha R_1)\, N'_n(\alpha R_2) - J'_n(\alpha R_2)\, N'_n(\alpha R_1) = 0. \tag{1.2}$$

2.-*Solución general.* — Sea $R_1$ el radio del cilindro con centro en $O$ y $R_2$ al correspondiente al centro $O'$. Además, sea $a = OO'$, $z, \rho, \varphi$ las coordenadas cilíndricas de un sistema con centro en $O$ y $z, \sigma, \chi$ las coordenadas cilíndricas de un sistema con centro en $O'$.




Consideraremos las soluciones $(E)$ correspondientes a nuestro problema.

Podemos expresar la componente $E_z$ referida al centro $O$ en la forma:

$$E_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^2 Z_n(\alpha\rho)\, e^{in\varphi} \,.\, F, \tag{2.1}$$

con

$$Z_n(\alpha\rho) = A_n J_n(\alpha\rho) + B_n N_n(\alpha\rho)$$

y, también, referida al $O'$:

$$\overline{E}_z = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^2 \overline{Z}_m(\alpha\sigma)\, e^{im\chi} \,.\, F, \tag{2.2}$$

con

$$\overline{Z}_m(\alpha\sigma) = \overline{A}_m J_m(\alpha\sigma) + \overline{B}_m N_m(\alpha\sigma).$$

Debe cumplirse, en virtud de la uniformidad de las funciones de campo que en cualquier punto del recinto comprendido entre los dos cilindros $E_z = \overline{E}_z$. Además, las soluciones cilíndricas de las ecuaciones de Maxwell son derivables de un potencial de Hertz que resulta ser proporcional a $E_z$. De aquí que la igualdad de $E_z$ implique la uniformidad de la solución.

Mediante el teorema de adición de las funciones cilíndricas podemos referir la (2. 2) a la (2. 1) y de allí obtener la relación entre los coeficientes $A, B$ y $\overline{A}, \overline{B}$ que determinan la uniformidad de la solución. Por otra parte, en (2. 1), dada la simetría respecto de $\varphi$ las condiciones de contorno $E_z(R_1) = E_\varphi(R_1) = 0$ quedan dadas por

$$Z_n(\alpha R_1) = 0 \quad \text{para cualquier } n \qquad (2.3)$$

y análogamente, en (2. 2) por la simetría respecto de $\chi$ las condiciones de contorno exigen que:

$$\overline{Z}_m(\alpha R_2) = 0 \quad \text{para cualquier } m. \qquad (2.4)$$

Mediante el teorema de adición:

$$\overline{Z}_m(\alpha\sigma) = e^{-im\psi} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} [\overline{A}_m J_{m+\mu}(\alpha\rho) + \overline{B}_m N_{m+\mu}(\alpha\rho)]\, J_\mu(\alpha a)\, e^{i\mu\varphi}$$

obtenemos:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n(\alpha\rho)\, e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\overline{A}_m J_n(\alpha\rho) + \overline{B}_m N_n(\alpha\rho)]\, J_{n-m}(\alpha a)\, e^{in\varphi}.$$

Luego:

$$A_n = \sum_m \overline{A}_m J_{n-m}(\alpha a)$$

$$B_n = \sum_m \overline{B}_m J_{n-m}(\alpha a). \qquad (2.5)$$

De las condiciones (2. 3), (2. 4) y de las relaciones (2. 5) se obtiene el sistema lineal homogéneo:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{A}_n \left[\frac{J_n(\alpha R_1)}{N_n(\alpha R_1)} - \frac{J_m(\alpha R_2)}{N_m(\alpha R_2)}\right] J_{n-m}(\alpha a) = 0 \qquad (2.6)$$

el cual admite una solución distinta de la trivial cuando el determinante del sistema es nulo:

$$\left\| \left(\frac{J_n(\alpha R_1)}{N_n(\alpha R_1)} - \frac{J_m(\alpha R_2)}{N_m(\alpha R_2)}\right) J_{n-m}(\alpha a) \right\| = 0. \qquad (2.7)$$

Esta ecuación trascendente define los valores posibles de $\alpha$

y es la correspondiente a (1.1), a la cual se reduce cuando $a = 0$, pues $J_{n-m}(0) = \delta_{n.m}$.

En forma análoga para las ondas ($H$) se llega a:

$$\left\| \left( \frac{J'_m(\alpha R_2)}{N'_m(\alpha R_2)} - \frac{J'_n(\alpha R_1)}{N'_n(\alpha R_1)} \right) J_{n-m}(\alpha a) \right\| = 0. \qquad (2.8)$$

3. - *Primera aproximación.* — Si llamamos $\alpha^0$ a una de las infinitas raíces de (1.1) las raíces de (2.6) pueden expresarse como una función par de $a$. Se tendrá, puesto que $\alpha = \alpha^0$ para $a = 0$:

$$\alpha = \alpha^0 + ca^2 + da^4 \ldots$$

Cuando $a$ es suficientemente pequeño tal que $a^4 \ll a^2$, tendremos en primera aproximación

$$\alpha = \alpha^0 + ca^2. \qquad (3.1)$$

En las ecuaciones (2.6) sólo serán significativos los términos factores de:

$$J_1(\alpha a) = -J_{-1}(\alpha a) = \frac{\alpha a}{2} = \xi \qquad J_0(\alpha a) = 1 - \xi^2$$

Esto es, en esta aproximación podemos satisfacer las condiciones de contorno con el desarrollo (2.1) reducido a tres términos. Si excitamos un modo de orden $n$ aparecen superpuesto a éste los modos de orden $n-1$ y $n+1$. En tal caso el determinante (2.6) se reduce a un determinante de tercer orden. Si llamamos:

$$a_{n \cdot m} = J_n(\alpha R_1)\, N_m(\alpha R_2) - J_m(\alpha R_2)\, N_n(\alpha R_1)$$

para un modo de orden $n$ (2.6) se convierte:

$$a_{n-1 \cdot n-1}\, a_{n \cdot n}\, a_{n\pm1 \cdot n\pm1} + \xi^2 \left[ a_{n \cdot n-1}\, a_{n-1 \cdot n}\, a_{n+1 \cdot n+1} + \right.$$
$$\left. + a_{n-1 \cdot n-1}\, a_{n \cdot n+1}\, a_{n\pm1 \cdot n} - 3\, a_{n-1 \cdot n-1}\, a_{n \cdot n}\, a_{n\pm1 \cdot n+1} \right] = 0. \qquad (3.2)$$

Por otra parte, la (3.1) puede expresarse:

$$\alpha = \alpha^0 + c_2\, \xi^2 \qquad \text{donde } \xi = \frac{\alpha a}{2} \cong \frac{\alpha^0 a}{2}. \qquad (3.3)$$

Desarrollando en serie las funciones cilíndricas involucradas en (3.2) en la forma:

$$J_n(\alpha R) = J_n(\alpha^0 R) + R\, c_2\, \xi^2\, J'_n(\alpha^0 R) =$$

$$= J_n(\alpha^0 R) + R C_2\, \frac{\xi^2}{2}\, [J_{n-1}(\alpha^0 R) - J_{n+1}(\alpha^0 R)]$$

obtenemos, si llamamos $a^0{}_{n\cdot m}$ al valor de $a_{n.m}$ calculada con el valor conocido $\alpha^0$ en vez de $\alpha$: $a^0{}_{n\cdot n} = 0$

$$a_{n-1\cdot n-1}\, a_{n.n}\, a_{n\pm1\cdot n+1} = c_2\, \frac{\xi^2}{2}\, [R_1(a^0{}_{n.n-1} - a^0{}_{n\cdot n\pm1}) +$$

$$+ R_2(a^0{}_{n-1\cdot n} - a^0{}_{n\pm1\cdot n})]\, a^0{}_{n-1\cdot n-1}\, a^0{}_{n\pm1\cdot n+1}$$

$$a_{n^I n-1}\, a_{n-1\cdot n}\, a_{n\pm1\cdot n+1} = a^0{}_{n.n-1}\, a^0{}_{n-1\cdot n}\, a^0{}_{n\pm1\cdot n+1}$$

$$a_{n-1.n-1}\, a_{n.n\pm1}\, a_{n\pm1\cdot n} = a^0{}_{n-1.n-1}\, a^0{}_{n.n+1}\, a^0{}_{n\pm1\cdot n}.$$

Con esto la (3. 2) permite calcular $C_2$, resultando:

$$C_2 = -2 \left\{ \frac{a^0{}_{n\cdot n-1}\, a^0{}_{n-1.n}}{[R_1(a^0{}_{n.n-1} - a^0{}_{n\cdot n\pm1}) + R_2(a^0{}_{n-1.n} - a^0{}_{n\pm1\cdot n})]\, a^0{}_{n-1.n-1}} + \frac{a^0{}_{n.n\pm1}\, a^0{}_{n+1.n}}{[R_1(a^0{}_{n.n-1} - a^0{}_{n.n\pm1}) + R_2(a^0{}_{n-1.n} - a^0{}_{n\pm1\cdot n})]\, a^0{}_{n\pm1.n+1}} \right\}$$

El sistema de seis ecuaciones lineales homogéneas a que quedan reducidas las (2. 5) y (2. 6) en esta aproximación permiten calcular los coeficientes $A_{n-1}$, $A_{n+1}$, $B_{n-1}$, $B_n$, $B_{n+1}$ en función de $A_n$:

$$A_{n-1} = \xi\, A_n\, \frac{N_{n-1}(\alpha R_1)}{N_n(\alpha R_1)} \times \frac{a_{n.n-1}}{a_{n-1.n-1}}$$

$$A_{n+1} = \xi\, A_n\, \frac{N_{n+1}(\alpha R_1)}{N_n(\alpha R_1)} \times \frac{a_{n.n+1}}{a_{n+1.n+1}}$$

$$B_{n-1} = -\xi\, A_n\, \frac{J_{n-1}(\alpha R_1)}{N_n(\alpha R_1)} \times \frac{a_{n.n-1}}{a_{n-1.n-1}}$$

$$B_n = -A_n\, \frac{J_n(\alpha R_1)}{N_n(\alpha R_1)}$$

$$B_{n\pm1} = -\xi\, A_n\, \frac{J_{n\pm1}(\alpha R_1)}{N_n(\alpha R_1)} \times \frac{a_{n.n\pm1}}{a_{n+1.n\pm1}}.$$

Análogamente se determina en esta aproximación la solución correspondiente a las ondas $(H)$ con el significado de

$$a_{n.m} = J'_n(\alpha R_1)\, N'_m(\alpha R_2) - J'_m(\alpha R_2)\, N'_n(\alpha R_1)$$

y $\alpha^0$ una de las raíces de $a^0_{n.n} = 0$.

4. - *Segunda aproximación.* — Para una segunda aproximación:

$$\alpha = \alpha^0 + c_2\, \xi^2 + c_4\, \xi^4$$

supuesto que $\xi^6 \ll \xi^4$.

En tal caso

$$J_2(\alpha a) = J_{-2}(\alpha a) = \frac{\xi^2}{2} \qquad J_1(\alpha a) = -J_1(\alpha a) = \xi \qquad J_0(\alpha a) = 1 - \xi^2$$

con lo cual (2.7) queda reducido a un determinante de quinto orden expresable en la forma:

$$a_{n-2.n-2}\, a_{n-1.n-1}\, a_{n.n}\, a_{n+1.n+1}\, a_{n+2.n+2} + \xi^2\, C_n + \xi^4\, D_n = 0, \qquad (4.1)$$

donde $C_n$ y $D_n$ son sumas de productos de $a_{n-2.n-2}$, $a_{n.n-2}$ . . . etc.

En esta aproximación:

$$J_n(\alpha R) = [1 - \frac{1}{4}\,(R\, C_2\, \xi)^2]\, J_n(\alpha^0 R) +$$

$$+ \frac{1}{2}\, R\, (C_2\, \xi^2 + C^4\, \xi^4)\, [J_{n-1}(\alpha^0 R) - J_{n+1}(\alpha^0 R)]$$

$$+ \frac{1}{8}\, (R\, C_2\, \xi^2)^2\, [J_{n-2}(\alpha^0 R) + J_{n+2}(\alpha^0 R)]$$

donde $\alpha^0$ es siempre una raíz de $a^0_{nn} = 0$. Los factores $a_{n.m}$ son expresables

$$a_{n.m} = a^0_{n.m} + \xi^2\, \beta_{n.m} + \xi^4\, \gamma_{n.m} + C_4\, \xi^4\, \delta_{n.m},$$

que con la (4.1) permite calcular $C_4$ en términos de $C_2$, $R_1$, $R_2$ y $a^0_{n.m}$.