TEORIA DE LAS ABERRACIONES GEOMETRICAS DE LOS SISTEMAS OPTICOS CENTRADOS

por Ricardo Platzeck

Observaorio Astronómico, Córdoba

(Recibido el 2/12/1949)

Summary: Two methods are developped in order to determine sucessively the geometrical aberrations of centered systems of an arbitrary number of optical surfaces of axial symmetry, spherical or not.

The first method is based on the classical concept of the angular eiconal (characteristic function), which is deduced from the principle of Fermat.

The second method uses for the determination of the aberrations of the system the matrix which transforms any given ray in the object space into a ray of the image space. This procedure is based on a method which has been given by R. A. Sampson in orler to obtain the aberrations of third order. It is shown that it can be developped into a form which permits to determine by successive approximations the coefficients of arbitrarily high order.

Introducción.

En este trabajo se indica el procedimiento que debe seguirse para obtener las aberraciones de un orden $(2n-1)$ cualquiera aplicando dos métodos fundamentalmente diferentes. El primero se basa en la función clásica del eiconal angular (función característica) que se deduce del principio de Fermat. En el segundo se determinan las aberraciones del sistema mediante la matriz que transforma a todo rayo del espacio objeto en un rayo del espacio imagen. Este último método está inspirado en una teoría desarrollada por R. A. Sampson (1), limitada a las aberraciones de tercer

(*) Extractado de la tesis presentada por el autor en la Universidad Nacional de La Plata en el año 1945.

Una exposición más detallada aparecerá en otra parte.

(1) Sampson, R. A. *A new Treatment of Optical Aberrations;* Phil. Trans., 1913, *212*, A, 149 - 185.

orden. La modificación y generalización estudiada aquí permite, en cambio, obtener sucesivamente las aberraciones de un orden cualquiera.. Ella es aplicable a sistemas ópticos centrados, con simetría alrededor de un eje en los cuales los medios transparentes son de índices de refracción constantes y están separados por superficies de discontinuidad.

Teoría del eiconal.

1. *Características del eiconal angular.* Consideremos un sistema óptico centrado y dos sistemas de coordenadas O_0, x_0, y_0, z_0 en el espacio objeto y O_1, x_1, y_1, z_1 en el espacio imagen tales que los ejes x_0 y x_1 coincidan con el eje óptico. Si $A_0(a_0, O, O)$ y y $A_1(a_1, O, O)$ son dos puntos sobre el eje óptico situados en el espacio objeto y en el espacio imagen respectivamente, entonces el eiconal angular $W(p_0, q_0, p_1, q_1)$ representa, para un rayo cualquiera que atraviesa el sistema, el camino óptico entre los pies de las perpendiculares trazadas por A_0 y A_1 al rayo considerado. W debe estar expresado en función de p_0, q_0, p_1, q_1, como variables independientes, donde m_0, p_0, q_0 y m_1, p_1, q_1, son los cosenos directores del rayo considerado en el espacio objeto (rayo incidente) y el espacio imagen (rayo emergente). A_0 y A_1 pueden en particular ser puntos conjugados. En la expresión de W figuran, desde luego, las constantes características del sistema óptico, como ser índices de refracción, radios de curvatura de las superficies ópticas (no necesariamente esféricas), distancias entre las mismas, etc.

Consideremos ahora dividido el sistema óptico en dos partes cualesquiera. Si es A_t el punto sobre el eje óptico que define la división y si son m_t, p_t, q_t, los cosenos directores del rayo en el espacio correspondiente, y si W_1, W_2 son los eiconales que caracterizan a la primera y segunda parte del instrumento, respectivamente, entonces es sabido que la suma $W_1 + W_2$ da el valor del eiconal de todo el sistema. Ahora bien, dado que en la suma figuran las seis variables $p_0, q_0, p_t, q_t, p_1, q_1$, es necesario eliminar las dos variables intermedias p_t, q_t, para que dicha suma represente verdaderamente al eiconal del sistema total.

La división analizada, desde luego puede hacerse en un número cualquiera de partes. Veremos más adelante que conviene calcular el eiconal correspondiente a cada una de las superficies ópticas que comprende el sistema en estudio; sumar los valores obtenidos y eliminar después las variables p, q, intermedias. El valor que resulta así representa el eiconal angular de todo el sistema.

Recordemos ahora cómo se obtienen las aberraciones de un sistema cuando se conoce su eiconal angular. Sea α_0 un plano perpendicular al eje óptico que pase por el punto A_0, y α_1 un plano análogo que pase por A_1.. En tal caso valen las relaciones

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial p_0} &= n_0 y_0 & \frac{\partial W}{\partial p_1} &= -n_1 y_1 \\ \frac{\partial W}{\partial q_0} &= n_0 z_0 & \frac{\partial W}{\partial q_1} &= -n_1 z_1 \end{aligned}$$

donde n_0 y n_1 son los índices de refracción en el espacio objeto e imagen, respectivamente, y_0, z_0 las coordenadas de la intersección del rayo luminoso con el plano frontal α_0 e y_1, z_1 las coordenadas de la intersección del rayo mencionado con el plano α_1; en particular α_0 y α_1 pueden ser el plano objeto e imagen del sistema cuyo eiconal angular es W. En tal caso

$$(2) \qquad y_1 = y_1(p_0, q_0, p_1, q_1), \qquad z_1 = z_1(p_0, q_0, p_1, q_1)$$

da la intersección del rayo genérico con el plano objeto expresado en función de las variables indicadas entre paréntesis. Para obtener de las (2) las aberraciones del sistema óptico es necesario expresarlas en función de las coordenadas y_0, z_0 en el plano objeto y de las coordenadas η, ς en el plano del diafragma (o de alguna de las pupilas del sistema).

En lo que sigue expondremos un método que permite obtener sucesivamente los términos del desarrollo

$$(3) \qquad y_1 = y_1^{(1)} + y_1^{(3)} + \dots, \; z_1 = z_1^{(1)} + z_1^{(3)} + \dots$$

en función de $y_0, z_0, \eta, \varsigma$, donde el exponente entre paréntesis indica el grado en las variables. $y_1^{(1)}, z_1^{(1)}$ dan naturalmente las inter-intersecciones gaussianas, de modo que las aberraciones de 3º, 5º, ... orden del sistema óptico están contenidas en las expresiones

$$(4) \qquad \Delta y_1 = y_1^{(3)} + y_1^{(5)} + \ldots, \quad \Delta z_1 = z_1^{(3)} + z_1^{(5)} + \ldots$$

2. *Eiconal de la refracción en una superficie óptica.* Sea O, x, y, z el sistema de coordenadas con origen en el vértice de la superficie óptica de eje x coincidente con el eje óptico; designemos con $P(X, Y, Z)$ al punto de intersección del rayo luminoso con la superficie. El valor del eiconal angular está dado, entonces, por la expresión (2)

$$(5) \quad \overline{W} = (n_0 m_0 - n_1 m_1) X + (n_0 p_0 - n_1 p_1) Y + \\ + (n_0 q_0 - n_1 q_1) Z - n_0 m_0 a_0 + n_1 m_1 a_1,$$

donde $\vec{U}_0(m_0, p_0, q_0)$ y $\vec{U}_1(m_1, p_1, q_1)$ son los vectores unitarios sobre el rayo incidente y emergente, respectivamente. $\overline{W}$ no representa al eiconal angular W buscado, ya que figuran además de las variables p_0, q_0, p_1, q_1, las variables X, Y, Z, m_0, m_1. Debemos pues, eliminar estas últimas. La eliminación de m_0 y m_1 resulta de las relaciones

$$(6) \qquad m_0^2 + p_0^2 + q_0^2 = 1, \qquad m_1^2 + p_1^2 + q_1^2 = 1,$$

en cambio, la eliminación de X, Y, Z se hace mediante la ecuación de la superficie óptica

$$(7) \qquad X = \varphi(Y, Z) \quad \text{o} \quad F(X, Y, Z)$$

y la ley de refracción según la cual el vector $\vec{N} = n_0 \vec{u}_0 - n_1 \vec{u}_1$ es normal a la superficie, vale decir, se satisfacen las relaciones (3)

$$(8) \qquad \begin{cases} (n_0 m_0 - n_1 m_1) \dfrac{\partial F}{\partial Y} = n_0 p_0 - n_1 p_1 \\[2ex] (n_0 m_0 - n_1 m_1) \dfrac{\partial F}{\partial Z} = n_0 q_0 - n_1 q_1, \end{cases}$$

(2) Born, M., Optik (J. Springer, 1933), pág. 73.
(3) Born, M., *Optik*, pág. 74.

que introducidas en la (5) dan

$$(9) \qquad \overline{W} = (n_0 m_0 - n_1 m_1) \left(X \frac{\partial F}{\partial X} + Y \frac{\partial F}{\partial Y} + Z \frac{\partial F}{\partial Z} \right) - $$
$$- n_0 m_0 a_0 + n_1 m_1 a_1.$$

Si ahora tenemos en cuenta que la superficie óptica es de revolución podemos poner $H^2 = Y^2 + Z^2$, con lo que la (9) puede escribirse

$$(10) \qquad \overline{W} = (n_0 m_0 - n_1 m_1) \left(X - 2H^2 \frac{\partial X}{\partial H^2} \right) - n_0 m_0 a_0 + n_1 m_1 a_1,$$

y si desarrollamos la (7) en serie

$$(11) \qquad F = X + \sum_{j=1}^{\infty} d_j H^{2j}, \qquad X = - \sum_{j=1}^{\infty} d_j H^{2j}$$

resulta

$$(12) \qquad \overline{W} = (n_0 m_0 - n_1 m_1) \sum_{j=1}^{\infty} (2j-1)\, d_j H^{2j} - n_0 m_0 a_0 + n_1 m_1 a_1.$$

Ahora bien, para eliminar H de la anterior nos valemos de dos expresiones; la primera de ellas se obtiene elevando al cuadrado y sumando las (8), siendo de la forma

$$(13) \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial H^2} \right)^2 H^2 = \psi(p_0, q_0, p_1, q_1),$$

y la segunda se obtiene derivando, multiplicando por H y elevando al cuadrado la (11); su valor es

$$(14) \qquad \frac{\partial F}{\partial H^2} H^2 = \sum_{l=1}^{\infty} [ik\, d_i\, d_k]_{l+1} H^{2l}$$

donde

$$(15) \qquad [ik\, d_i\, d_k]_m = \sum_{\substack{i+k=m \\ i,k \geq 1}} ik\, d_i\, d_k.$$

Si ahora igualamos los segundos miembros de (13) y (14) y despejamos H^2 se obtiene la siguiente fórmula de recurrencia

$$(16) \quad H^2{}_{(p)} = \frac{1}{d_1{}^2} \psi(p_0, q_0, p_1, q_1) - \frac{1}{d_1{}^2} \{[ik\, d_i\, d_k]_3\, H^4{}_{(p-1)} + \\ + [ik\, d_i\, d_k]_4\, H^6{}_{(p-2)} + \ldots + [ik\, d_i\, d_k]_{p+1}\, H_{(1)}{}^{2p}\},$$

donde $H_{(l)}{}^{2r}$ indica que H^{2r} está desarrollado hasta términos de grado $2t$ en las p, q. La expresión (16) permite obtener sucesivamente $H_{(1)}{}^2$, $H_{(2)}{}^2$, etc., valores que reemplazados en la (12) nos dan el eiconal angular

$$(17) \quad W(p_0, q_0, p_1, q_1) = W_{(2)} + W_{(4)} + \ldots + W_{(2p)} + \ldots$$

donde se ha tenido en cuenta la (6).

3. *Sistema con r superficies ópticas.* Consideremos un sistema formado por r superficies ópticas. Para definir los r eiconales parciales correspondientes a las mismas fijemos sobre el eje óptico los siguientes puntos: $A_0\,(a_0, O, O)$, en el espacio objeto, $A_r\,(a_r, O, O)$ en el espacio imagen, y los puntos A_l $(l=1, \ldots, r-1)$ entre las superficies S_l y S_{l+1}. Por lo demás los puntos $A_0, \ldots, A_r$ son arbitrarios; A_0 y A_r pueden en particular ser las intersecciones de los planos objeto e imagen, respectivamente, con el eje óptico.

El valor del eiconal del sistema está dado, como sabemos ya, por la suma de los eiconales correspondientes a las partes del instrumento definidas por los puntos A_l. Podemos escribir

$$(18) \quad \overline{W} = W_1\,(p_0, q_0, p_1, q_1) + \ldots + W_r\,(p_{r-1}, q_{r-1}, p_r, q_r)$$

expresión de la cual debemos eliminar las variables intermedias $p_1, q_1, \ldots, p_{r-1}, q_{r-1}$. Para ello derivamos sucesivamente la (18) con respecto a $p_1, q_1, \ldots, p_{r-1}, q_{r-1}$ y obtenemos

$$(19) \quad \frac{\partial W_i}{\partial p_i} = -\frac{\partial W_{i+1}}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial W_i}{\partial q_i} = -\frac{\partial W_{i+1}}{\partial q_i}, \quad (i=1, \ldots, r-1)$$

que de acuerdo a las (1) no son sino las ecuaciones de continuidad del rayo luminoso a través de los planos perpendiculares al eje óptico por los puntos A_l.

Las expresiones (19) nos permiten efectuar la eliminación de las p_i, q_i intermedias por aproximaciones sucesivas. Sean

(20) $W_i = W_i^{(a)} + W_i^{(2)} + \ldots + W_i^{(b)} + \ldots \quad (i = 1, \ldots, r-1)$

los desarrollos en serie de los eiconales de los elementos que componen el sistema óptico. Si reemplazamos $W_i^{(2)}$ en las (19) obtenemos un sistema de $2(r-1)$ ecuaciones cuya resolución nos da las $2(r-1)$ incógnitas

(21) $$p_1^{(1)}, q_1^{(1)}, \ldots, p_{r-1}^{(1)}, q_{r-1}^{(1)}$$

en función de p_0, q_0, p_r, q_r; ponemos el exponente entre paréntesis para indicar que se trata de relaciones lineales. Si ahora introducimos $W_i^{(2)} + W_i^{(4)}$ en (19) resulta un sistema de ecuaciones con términos de primer y tercer grado en las p_i, q_i intermedias. Podemos reemplazar en los términos de tercer grado las (21) sin perder generalidad; en esta forma nuevamente resulta un sistema lineal con $2(r-1)$ incógnitas, que resuelto nos da $p_i^{(3)}, q_i^{(3)}$. Siguiendo en la misma forma podemos obtener sucesivamente los términos de 5°, 7°, ... grado en las variables finales. Reemplazando los valores obtenidos en (18) se obtiene el desarrollo del eiconal del sistema óptico dado en función de p_0, q_0, p_r, q_r.

4. *Aberraciones en función de las coordenadas en el plano objeto y en el plano del diafragma.* Consideremos nuevamente un sistema óptico formado por r superficies y supongamos que el diafragma se encuentre entre la superficie l y la $l+1$ y sea A_l el punto de intersección del plano que contiene al diafragma con el eje óptico. Dividimos el sistema total en dos partes; la primera comprendida entre A_0 en el espacio objeto, y A_l, y la segunda entre A_l y A_r en el espacio imagen. Los eiconales angulares correspondientes los caracterizamos de la siguiente manera

(22) $W_1 = W_1(p_0, q_0, p_l, q_l), \quad W_2 = W_2(p_l, q_l, p_r, q_r),$

y que ya sabemos calcular hasta un orden $2s$ cualquiera.

Si ahora los pares (y_0, z_0), (y_r, z_r), (η, ς) son las coordenadas en el plano por A_0, por A_r y en el diafragma, respectivamente. Entonces las (22) proporcionan de acuerdo a las (1) las ocho expresiones

$$\frac{\partial W_1}{\partial p_0} = n_0 y_0, \quad \frac{\partial W_1}{\partial q_0} = n_0 z_0$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial p_l} = -n_l \eta \quad \frac{\partial W_1}{\partial q_l} = -n_l \varsigma$$

(23)

$$\frac{\partial W_2}{\partial p_l} = n_l \eta, \quad \frac{\partial W_2}{\partial q_l} = n_l \varsigma$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial p_r} = -n_r y_r, \quad \frac{\partial W_2}{\partial q_r} = -n_r z_r$$

cuyas variables son

(24) $$p_0, q_0, p_l, q_l, p_r, q_r, y_0, z_0, \eta, \varsigma, y_r, z_r.$$

Para expresar las coordenadas y_r, z_r en el plano A_r en función de $y_0, z_0, \eta, \varsigma$ procedemos nuevamente por aproximaciones sucesivas. Introducimos los términos de 2º grado $W_1^{(2)}$ y $W_2^{(2)}$ del desarrollo en serie de las (22) en las (23). Resulta así un sistema de ocho ecuaciones lineales; las dos últimas proporcionan

(25) $$y_r^{(1)} = y_r^{(1)}(p_l, q_l, p_r, q_r), \quad z_r^{(1)} = z_r^{(1)}(p_l, q_l, p_r, q_r),$$

y las seis restantes permiten eliminar p_l, q_l, p_r, q_r por una parte, é introducir y_0, z_0 por la otra. Se obtienen así las relaciones lineales de la aproximación gaussiana

(26) $$y_r^{(1)} = y_r^{(1)}(y_0, z_0, \eta, \varsigma), \quad z_r^{(1)} = z_r^{(1)}(y_0, z_0, \eta, \varsigma)$$

con las cuales se determina la posición A de A_r conjugada de A_0. Si designamos con y, z a las coordenadas correspondientes resulta

(27) $$y = y(y_0, z_0), \quad z = z(y_0, z_0),$$

que naturalmente son independientes de η, ς.

Para obtener las aberraciones de tercer orden introducimos $W_2^{(4)}$ del desarrollo de las (22) en las (23) y si reemplazamos los valores lineales ya obtenidos en los términos de tercer grado del sistema resultante, dicho sistema nuevamente será lineal. Una vez resuelto nos da

(28) $$p_0^{(3)}, q_0^{(3)}, \ldots, p_r^{(3)}, q_r^{(3)}, y_r^{(3)}, z_r^{(3)}.$$

Si repetimos el mismo procedimiento agregando más términos del desarrollo de W_1 y W_2 obtenemos sucesivamente las aberraciones de 5º, 7º.... orden.

Teoría de las matrices.

4. *Introducción.* Consideremos nuevamente un sistema cualquiera, con r superficies ópticas y sean A_0 y A_r dos puntos sobre el eje; el primero en el espacio objeto y el segundo en el espacio imagen. Con origen en A_0 y A_r fijamos dos sistemas de coordenadas O, x, y, z y O', x', y', z', donde x y x' coinciden con el eje óptico. A un rayo de ecuación

$$y = y_0 + \beta_0 x, \quad z = z_0 + \gamma_0 x, \tag{29}$$

le corresponderá en general un rayo

$$y' = y_1 + \beta_1 x', \quad z' = z_1 + \gamma_1 x'. \tag{30}$$

Los dos sistemas de coeficientes

$$y_0, z_0, \beta_0, \gamma_0, \qquad y_1, z_1, \beta_1, \gamma_1,$$

definen al rayo objeto y al rayo imagen, respectivamente.

Ahora bien, el instrumento óptico establece una relación entre el primer grupo y el segundo, vale decir que los valores $y_1, z_1, \beta_1, \gamma_1$, pueden ser expresados en función de $y_0, z_0, \beta_0, \gamma_0$, y de las constantes que caracterizan al instrumento. Veamos cómo se obtienen dichas relaciones.

5. *Refracción en una superficie óptica.* Resolveremos primero el problema propuesto para el caso de la refracción en una superficie que separa dos medios de índices n_0 y n_1. Por el momento consideraremos una superficie sin simetría particular, de ecuación

$$X = \varphi(Y, Z), \quad F(X, Y, Z) = 0. \tag{31}$$

Hagamos coincidir los ejes x y x', colocando el origen común en el punto en que x corta a la superficie. Por tener los rayos objeto e imagen correspondientes un punto común sobre la superficie es

$$y_1 + \beta_1 X = y_0 + \beta_0 X, \quad z_1 + \gamma_1 X = z_0 + \gamma_0 X. \tag{32}$$

Recurrimos ahora a la ley de la refracción (y reflexión) en la forma en que la hemos presentado en el capítulo anterior.

De la (8) y de la (31) resulta

$$(33)\qquad -\Delta(n\,m)\frac{\partial X}{\partial Y}=\Delta(n\,p),\quad -\Delta(n\,m)\frac{\partial X}{\partial Z}=\Delta(n\,q),$$

donde hemos introducido la notación abreviada

$$(34)\qquad \Delta(n\,m)=n_0\,m_0-n_1\,m_1,\quad \Delta(n\,p)=n_0\,p_0-n_1\,p_1,$$
$$\Delta(n\,q)=n_0\,q_0-n_1\,q_1.$$

Si nos valemos de las relaciones

$$(35)\qquad p_0=m_0\,\beta_0,\quad q_0=m_0\,\gamma_0,\quad p_1=m_1\,\beta_1,\quad q_1=m_1\,\gamma_1,$$

entre los cosenos directores y los coeficientes angulares, la (33) toma la forma

$$(36)\qquad \begin{aligned}\beta_1&=\frac{\Delta(nm)}{n_1m_1}\cdot\frac{\partial X}{\partial Y}+\frac{n_0m_0}{n_1m_1}\cdot\beta_0\\ \gamma_1&=\frac{\Delta(nm)}{n_1m_1}\cdot\frac{\partial X}{\partial Z}+\frac{n_0m_0}{n_1m_1}\cdot\gamma_0.\end{aligned}$$

Si ahora reemplazamos estas expresiones en la (32), resulta

$$(37)\qquad \begin{aligned}y_1&=y_0+X\,\frac{\Delta(nm)}{n_1m_1}\left(-\beta_0-\frac{\partial X}{\partial Y}\right)\\ z_1&=z_0+X\,\frac{\Delta(nm)}{n_1m_1}\left(-\gamma_0-\frac{\partial X}{\partial Z}\right)\end{aligned}$$

Las (36) y (37) dan los valores de $y_1, z_1, \beta_1, \gamma_1$, para el caso general en que la superficie no está sometida a restricción alguna.

Consideremos ahora una superficie de revolución alrededor del eje x. En tal caso es

$$H^2=Y^2+Z^2,$$

y como

$$Y = y_0 + \beta_0 X, \quad Z = z_0 + \gamma_0 X,$$

resulta

$$\frac{\partial X}{\partial Y} = 2 \, \frac{dX}{dH^2} (y_0 + \beta_0 X), \quad \frac{\partial X}{\partial Z} = 2 \, \frac{dX}{dH^2} (z_0 + \gamma_0 X).$$

Si introducimos ahora estas expresiones en las (32) y (33) obtenemos

$$y_1 = \left[1 - 2X \frac{dX}{dH^2} \cdot \frac{\Delta(nm)}{n_1 m_1}\right] y_0 - X \frac{\Delta(nm)}{n_1 m_1} \left[1 + 2X \frac{dX}{dH^2}\right] \beta_0$$

$$z_1 = \left[1 - 2X \frac{dX}{dH^2} \cdot \frac{\Delta(nm)}{n_1 m_1}\right] z_0 - X \frac{\Delta(nm)}{n_1 m_1} \left[1 + 2X \frac{dX}{dH^2}\right] \gamma_0$$

(38)

$$\beta_1 = 2 \frac{dX}{dH^2} \cdot \frac{\Delta(nm)}{n_1 m_1} \cdot y_0 + \left[\frac{n_0 m_0}{n_1 m_1} + 2X \frac{dX}{dH^2} \frac{\Delta(nm)}{n_1 m_1}\right] \beta_0 .$$

$$\gamma_1 = 2 \frac{dX}{dH^2} \cdot \frac{\Delta(nm)}{n_1 m_1} \cdot z_0 + \left[\frac{n_0 m_0}{n_1 m_1} + 2X \frac{dX}{dH^2} \frac{\Delta(nm)}{n_1 m_1}\right] \gamma_0$$

que podemos escribir en forma abreviada

$$(39) \qquad \begin{aligned} y_1 &= g_{11} y_0 + g_{12} \beta_0 \qquad & \beta_1 &= g_{21} y_0 + g_{22} \beta_0 \\ z_1 &= g_{11} z_0 + g_{12} \gamma_0 \qquad & \gamma_1 &= g_{21} z_0 + g_{22} \gamma_0 . \end{aligned}$$

Estas expresiones muestran que la transformación que permite expresar $y_1, z_1, \beta_1, \gamma_1$, en función de $y_0, z_0, \beta_0, \gamma_0$, queda perfectamente determinada por la matriz

$$(40) \qquad \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 - 2X \dfrac{dX}{dH^2} \dfrac{\Delta(nm)}{n_1 m_1} & X \dfrac{\Delta(nm)}{n_1 m_1} \left[1 + 2X \dfrac{dX}{dH^2}\right] \\ 2 \dfrac{dX}{dH^2} \dfrac{\Delta(nm)}{n_1 m_1} & \left[\dfrac{n_0 m_0}{n_1 m_1} + 2X \dfrac{dX}{dH^2} \dfrac{\Delta(nm)}{n_1 m_1}\right] \end{Vmatrix}$$

A la matriz (40) la designaremos con el nombre de matriz característica de la superficie óptica, que separa los medios de índices de refracción n_0 y n_1.

6. *Combinación de varios sistemas ópticos.* Analicemos primero el efecto de una translación del sistema de referencia. Para expresar los rayos dados en el sistema O, x, y, z en el sistema O', x', y', z', trasladado en

$$x' = x - e$$

no hay más que aplicar a $y_0, z_0, \beta_0, \gamma_0$, la transformación definida por la matriz

$$\|e\| = \begin{Vmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{41}$$

para obtener $y_1, z_1, \beta_1, \gamma_1$, como puede comprobarse de inmediato.

Si ahora

$$\|g_{ik}\| = \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{Vmatrix} \qquad \|k_{ik}\| = \begin{Vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{Vmatrix} \tag{42}$$

son las matrices de los sistemas centrados para los cuales el origen de coordenadas en el espacio imagen del primero, entonces valen las expresiones

$$\begin{aligned} y_1 &= g_{11}\, y_0 + g_{12}\, \beta_0 & \qquad y_2 &= k_{11}\, y_1 + k_{12}\, \beta_1 \\ z_1 &= g_{11}\, z_0 + g_{12}\, \gamma_0 & z_2 &= k_{11}\, z_1 + k_{12}\, \gamma_1 \\ \beta_1 &= g_{21}\, y_0 + g_{22}\, \beta_0 & \beta_2 &= k_{21}\, y_1 + k_{22}\, \beta_1 \\ \gamma_1 &= g_{21}\, z_0 + g_{22}\, \gamma_0 & \gamma_2 &= k_{21}\, z_1 + k_{22}\, \gamma_1 . \end{aligned}$$

Eliminando de ellas las variables intermedias $y_1, z_1, \beta_1, \gamma_1$, obtenemos

$$y_2 = (g_{11}\,k_{11} + g_{21}\,k_{12})\,y_0 + (g_{12}\,k_{11} + g_{22}\,k_{12})\,\beta_0$$

$$z_2 = (g_{11}\,k_{11} + g_{21}\,k_{12})\,z_0 + (g_{12}\,k_{11} + g_{22}\,k_{12})\,\gamma_0$$

$$\beta_2 = (g_{11}\,k_{21} + g_{21}\,k_{22})\,y_0 + (g_{12}\,k_{21} + g_{22}\,k_{22})\,\beta_0$$

$$\gamma_2 = (g_{11}\,k_{21} + g_{21}\,k_{22})\,z_0 + (g_{12}\,k_{21} + g_{22}\,k_{22})\,\gamma_0$$

vale decir que el instrumento compuesto tiene la matriz

$$(43)\qquad \|g_{ik}\| \rightarrow \|k_{ik}\| = \begin{Vmatrix} g_{11}\,k_{11} + g_{21}\,k_{12} & g_{12}\,k_{11} + g_{22}\,k_{12} \\ g_{11}\,k_{21} + g_{21}\,k_{22} & g_{12}\,k_{21} + g_{22}\,k_{22} \end{Vmatrix} = \|G_{ik}\|$$

donde puedde observarse que $\|G_{ik}\|$ es igual al producto de la matriz $\|k_{ik}\|$ por la $\|g_{ik}\|$, es decir

$$\|g_{ik}\| \rightarrow \|k_{ik}\| = \|G_{ik}\| = \|k_{ik}\| \times \|g_{ik}\|. \qquad (94)$$

En general, un instrumento compuesto de n matrices

$$\|g_{ik}\|_j \quad j = 1, \ldots, n,$$

tiene por matriz al producto

$$(44)\qquad \|G_{ik}\| = \prod_{j=n}^{1} \|g_{ik}\|_j$$

que permite transformar un rayo del primer espacio objeto en el rayo correspondiente del último espacio imagen.

7. *Cálculo de las aberraciones.* Consideremos un sistema óp-itco comprendido entre los sistemas de referencia (O_0, x_0, y_0, z_0) y (O_r, x_r, y_r, z_r). Sea $(O_0, y_0\,z_0)$ el plano objeto y (O_r, y_r, z_r) el plano imagen del mismo. Si $\|G_{ik}\|$ es la matriz característica del sistema considerado, entonces el punto $P_0(y_0, z_0)$ es la intersección del rayo luminoso (genérico) con el plano objeto y el punto $P_r(y_r, z_r)$ es la intersección del mismo rayo con el plano imagen. Las coordenadas del punto P_r están dadas por

$$(45)\qquad y_r = G_{11}\,y_0 + G_{12}\,\beta_0, \qquad z_r = G_{11}\,z_0 + G_{12}\,\gamma_0.$$

Ahora bien, si a y_r, z_r le restamos los valores $y_r^{(1)}$, $z_r^{(1)}$ dados por la aproximación gaussiana, obtenemos las aberraciones del sistema óptico mencionado:

$$\Delta y_r = y_r - y_r^{(1)}, \qquad \Delta z_r = z_r - z_r^{(1)}. \tag{46}$$

Del primer término del desarrollo en serie de las G_{ik}, resulta

$$y_r^{(1)} = G_{11}^{(0)}\, y_0, \quad z_r^{(0)} = G_{11}^{(0)}\, z_0$$

ya que

$$G_{12} = 0$$

es la condición para que P_r sea conjugado de P_0.

Para que la (46) proporcione las aberraciones en la forma conveniente, es decir en función de las coordenadas en el plano objeto y las del diafragma, es necesario eliminar de las coordenadas sobre las superficies ópticas, las variables intermedias e introducir las variables η, ς sobre el diafragma. Estas operaciones se efectúan en forma análoga a la desarrollada para el eiconal angular.

8. *Eliminación de las coordenadas sobre la superficie óptica.* Basta hacer la eliminación de X, Y, Z, para cada una de las matrices características de las superficies de separación de dos medios consecutivos, que intervienen en un instrumento cualquiera.

Si analizamos la matriz (40) que caracteriza a la superficie

$$X = \varphi(H^2)$$

observamos que en las g_{ik} figuran expresiones en

$$m_0, m_1, \frac{dX}{dH^2}, \quad X,$$

Si tenemos en cuenta las (11), (13) y (16), podemos expresar estas cantidades en función de p_0, q_0, p_1, q_1, o sea

$$g_{ik} = g_{ik}(p_0, q_0, p_1, q_1). \tag{47}$$

Si ahora tenemos en cuenta las relaciones

$$p_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{1+\beta_i^2+\gamma_i^2}}, \quad q_i = \frac{\gamma_i}{\sqrt{1+\beta_i^2+\gamma_i^2}} \quad i=0,1,$$

podemos expresar g_{ik} en función de $\beta_0, \gamma_0, \beta_1, \gamma_1$.

9. *Sistema con r superficies ópticas.*

Si consideramos un sistema como el descripto en el § 3 obtenemos paralelamente a las (19) un sistema de ecuaciones del tipo

$$y_j = k_{11,j}\, y_{j-1} + k_{12,j}\, \beta_{j-1}, \quad z_j = \ldots$$

(48)

$$\beta_j = k_{21,j}\, y_{j-1} + k_{22,j}\, \gamma_{j-1}, \quad \gamma_j = \ldots$$

que permiten, siguiendo un procedimiento de aproximaciones sucesivas muy análogo al empleado para el eiconal angular, eliminar las variables intermedias.

10. *Aberraciones en función de $y_0, z_0, \eta, \varsigma$.*

Tomemos nuevamente el sistema óptico dado en § 4 y sea $\|H_{ik}\|$ la matriz de la primera parte y $\|L_{ik}\|$ la de la segunda parte del instrumento. Podemos formar con ellas ocho expresiones análogas a las (23) aplicando las (39) que nos permiten también obtener aquí las aberraciones del sistema en función de las variables finales según un camino paralelo al seguido en § 4.

Este trabajo ha sido expuesto y discutido, en todas sus partes, en el seminario del Observatorio de Córdoba, por lo que deseo expresar mi agradecimiento a los participantes del mismo, en especial a los doctores E. Gaviola y G. Beck.