

LAS FLUCTUACIONES EN LA INTENSIDAD DE LOS RAYOS BIRREFRACTADOS

por D. CANALS FRAU
Observatorio Astronómico, Córdoba

(Recibido el 25 de abril de 1949)

SUMMARY: Quantum electrodynamics permits to study the fluctuations of the distribution of intensities in two rays emerging from a birefringent plate for any given number of incident photons. It leads for single photons to the elementary quantum theoretical description of the phenomenon, and for large photon numbers to the limit of the classical theory. The quantum theoretical part of the intensity fluctuations should be observable up to "intensities" (photon number) corresponding to one thousand photons.

1. — *Introducción.*

La división de un rayo luminoso monocromático mediante un dispositivo adecuado (placa birrefringente, placa transparente, etc.), se describe de manera distinta, según se emplee la teoría clásica o la teoría cuántica.

En el caso de la electrodinámica clásica, las intensidades relativas de los rayos están siempre unívocamente definidas por las amplitudes y las constantes de fase de las ondas respectivas.

Según el formalismo de la teoría cuántica, debemos considerar la intensidad de los rayos como el efecto de un número discreto de fotones y, por lo tanto, habrá fluctuaciones estadísticas en la intensidad de cada rayo.

Es evidente que este último formalismo debe coincidir, en lo que a las magnitudes observables (para números cuánticos elevados) se refiere, con la electrodinámica clásica. Nos proponemos tratar en lo que sigue los casos límites: a) de la electrodinámica clásica; b) de un solo fotón, según el formalismo cuántico elemental; y después, la transición de uno en otro por medio de la electrodinámica cuántica y ver si es posible hallar un número de fotones tal que, por una parte, aún sean notables las

fluctuaciones estadísticas, y por otra, las intensidades sean registrables con adecuados instrumentos de medida.

Trataremos el caso particular de un rayo polarizado que incide sobre una placa birrefringente dando lugar a dos rayos emergentes, el ordinario y el extraordinario, y hallaremos una magnitud cuántica que nos permita determinar el estado de polarización de la radiación emergente.

2. — Caso de la electrodinámica clásica.

Sea una placa birrefringente de constantes dieléctricas $\epsilon_x \neq \epsilon_y = \epsilon_z$, y de eje óptico perpendicular a la superficie. Disponámosla de manera que el plano $x=0$ coincida con una cara de la placa. Formando un ángulo φ con la normal, incida un rayo luminoso monocromático. Llamemos \vec{E}_e al vector eléctrico si vibra en el plano xy , \vec{E}_0 si vibra en dirección perpendicular a dicho plano. Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} \vec{E}_e &= \vec{A}_e e^{i(k_0 ct - \vec{k}r)}, & \vec{A}_e &= a_e e^{-i\alpha} \vec{U}, & |\vec{U}| &= 1; \\ \vec{E}_0 &= \vec{A}_0 e^{i(k_0 ct - \vec{k}r)}, & \vec{A}_0 &= a_0 e^{-i\beta} \vec{V}, & |\vec{V}| &= 1; \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde $k_0 = 2\pi/\lambda_0$, $c =$ velocidad de la luz en el vacío, $t =$ tiempo, $\vec{k} = (2\pi/\lambda)\vec{s}$, $\vec{s} =$ vector unitario que indica la dirección de propagación, $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, α y β son las constantes de fase.

Designemos con \vec{E}''_0 y \vec{E}''_e los vectores eléctricos de los rayos ordinario y extraordinario, respectivamente. Mediante las condiciones en el límite, la adecuada elección del ángulo φ y del espesor d de la placa, podemos expresar

$$\begin{aligned} \vec{E}''_0 &= \vec{A}''_0 e^{i(k_0 ct - \vec{k}r)}, & \vec{A}''_0 &= \vec{A}_0 e^{i(dk_x + m'\pi)}, \\ \vec{E}''_e &= \vec{A}''_e e^{i(k_0 ct - \vec{k}r)}, & \vec{A}''_e &= \vec{A}_e e^{i(dk_x + m\pi)}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde m y m' son números reales enteros, y

$$d = \frac{m'\lambda}{2\sqrt{\epsilon_y}} \cdot \sqrt{\frac{(\epsilon_y/\epsilon_x) - (m/m')^2}{(\epsilon_y/\epsilon_x) - 1}}$$

puede ser elegido de manera tal que se anule el rayo-reflejado en $x=O$.

Incidan ahora simultáneamente las dos ondas polarizadas definidas por \vec{E}_0 y \vec{E}_e . El haz incidente está ahora formado por la superposición de las dos ondas y, debido a la diferencia relativa de fase $\eta = \alpha - \beta$ estará «elípticamente» polarizado⁽¹⁾.

Giremos el dispositivo que nos provee del haz incidente en un ángulo $0 < \vartheta < \pi/2$. Esto equivale a introducir nuevas coordenadas E'_0 y E'_e , definidas por

$$\begin{aligned} E_0 &= E'_0 \cos \vartheta - E'_e \sin \vartheta, \\ E_e &= E'_e \sin \vartheta + E'_0 \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Pero es $E'_0 = a_0 \cdot \cos(k_0 ct - \vec{k}r - \beta)$ y $E'_e = a_e \cos(k_0 ct - \vec{k}r - \alpha)$. E_0 y E_e , como suma de dos funciones sinusoidales de igual frecuencia, pero distintas amplitudes y constantes de fase, pueden ser expresadas por

$$\begin{aligned} E_0 &= a'_0 \cdot \cos(k_0 ct - \vec{k}r - \beta'), \\ E_e &= a'_e \cos(k_0 ct - \vec{k}r - \alpha'). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Reemplazando (2.4) en (2.3) se obtienen las relaciones

$$\begin{aligned} (a'_0)^2 &= a_0^2 \cos^2 \vartheta + a_e^2 \sin^2 \vartheta - 2 a_0 a_e \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \eta, \\ (a'_e)^2 &= a_0^2 \sin^2 \vartheta + a_e^2 \cos^2 \vartheta + 2 a_0 a_e \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \eta. \end{aligned} \quad (2.5)$$

La primera de las (2.5) es la intensidad, función de η ,

⁽¹⁾ En el dominio de la óptica las ecuaciones (2.1) constituyen recursos teóricos, cómodos a nuestros fines, ya que, por una parte, no podemos realizar luz estrictamente monocromática, y, por otra, las ondas son amortiguadas. De donde resulta que tanto a_0 y a_e como $\eta = \alpha - \beta$ son funciones lentamente variables (en comparación con el período) del tiempo.

de la componente del haz incidente según la dirección definida por \vec{E}''_0 y que luego de atravesar la placa se convertirá en el rayo ordinario; la segunda, la componente del haz incidente según la dirección definida por \vec{E}''_e y que se convertirá en el rayo extraordinario.

Dado que en el dominio de la óptica, por lo dicho en (1), η varía, el último término de (2.5) toma tanto valores positivos como negativos, y por ello, lo que experimentalmente se observa es el valor medio con respecto a la diferencia de fase. Este valor medio con respecto a η es

$$\begin{aligned} \overline{(a'_0)^2} &= a_0^2 \cos^2 \vartheta + a_e^2 \sin^2 \vartheta, \\ \overline{(a'_e)^2} &= a_0^2 \sin^2 \vartheta + a_e^2 \cos^2 \vartheta. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Así resulta, para la desviación cuadrática media de la intensidad de cualesquiera de los dos rayos alrededor de su respectivo valor medio (2)

$$\sqrt{\overline{\sigma^2}} = \sqrt{2} a_0 a_e |\sin \vartheta| |\cos \vartheta|. \quad (2.7)$$

3. — Teoría elemental de un solo fotón.

Consideremos dispuesta la placa birrefringente igual que en el § 2. Llamemos π_1 al estado de polarización según el plano xy ; π_2 al estado de polarización según el plano perpendicular a xy . Si el plano de polarización de la onda incidente coincide con el xy , sólo emergerá el rayo ordinario, si coincide con el perpendicular a xy , tendremos solamente el rayo extraordinario. El estado de polarización del rayo emergente estará, pues, siempre bien definido y puede ser descrito por la matriz diagonal (3).

$$\pi = \begin{vmatrix} \pi_1 & 0 \\ 0 & \pi_2 \end{vmatrix}. \quad (3.1)$$

(2) Si se pudieran efectuar determinaciones en un tiempo menor que 10^{-8} seg., serían verificables experimentalmente las fórmulas en las que interviene el ángulo η .

(3) G. BECK, *Introduction a la Théorie des Quanta*, Coimbra 1942, p. 12.

Si giramos el plano de polarización de la onda incidente en un ángulo $0 < \vartheta < \pi/2$, ya no tenemos un rayo emergente sino dos y, por lo tanto, el estado de polarización no estará más definido unívocamente por (3.1). Nuestro estado puede ser descrito ahora por la matriz que se obtiene de la (3.1) mediante una transformación unitaria, que corresponde a la operación de «rotación de la placa»

$$\pi' = \begin{vmatrix} \pi_1 \cos^2 \vartheta + \pi_2 \sin^2 \vartheta & (\pi_1 - \pi_2) \sin \vartheta \cos \vartheta e^{-i\delta} \\ (\pi_1 - \pi_2) \sin \vartheta \cos \vartheta e^{i\delta} & \pi_1 \sin^2 \vartheta + \pi_2 \cos^2 \vartheta \end{vmatrix} \quad (3.2)$$

Los elementos diagonales son valores medios posibles del estado de polarización, los no-diagonales definen la desviación cuadrática media

$$\sqrt{\sigma^2} = |(\pi_1 - \pi_2)| |\sin \vartheta| |\cos \vartheta|, \quad (3.3)$$

de la magnitud π' alrededor de sus valores propios.

La (3.3) representa la desviación cuadrática media que se obtiene si se considera la distribución de un fotón sobre los dos rayos emergentes. Es decir, si llamamos p a la probabilidad de registrar al fotón en el rayo ordinario, $1 - p = q$ la probabilidad de registrarlo en el extraordinario; $\pi_1 = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$, $\pi_2 = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, según el fotón esté en el primero o segundo de los rayos, obtenemos

$$(\pi_1 - \pi_2) \sqrt{pq}, \quad (3.4)$$

que coincide con (3.3) si ponemos

$$p = \cos^2 \vartheta, \quad q = \sin^2 \vartheta \quad (3.5)$$

4. — Caso de la electrodinámica cuántica.

Para hacer el estudio general de la distribución de un número cualquiera de fotones en los dos estados finales, hay que recurrir a la electrodinámica cuántica.

Considerando una configuración de fotones en el rayo inci-

dente, puede encontrarse, mediante la teoría de las transformaciones, la probabilidad de cada una de las configuraciones posibles en los rayos refractados⁽⁴⁾. Una configuración del estado inicial está descrita por la autofunción

$$e^{-\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2}} H_r(x_1) \cdot H_{N-r}(x_2), \quad (4.1)$$

en donde $H_r(x_1)$ y $H_{N-r}(x_2)$ son polinomios de Hermite normalizados que se refieren, respectivamente, a uno y a otro de los estados de polarización del rayo incidente.

Se demuestra que

$$e^{-\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2}} H_r(x_1) H_{N-r}(x_2) = \sum_{s=0}^N d_{s, N-s}^{r, N-r} H_s(y_0) \cdot H_{N-s}(y_e) e^{-\frac{y_0^2}{2} - \frac{y_e^2}{2}}, \quad (4.2)$$

estando las coordenadas en nuestro caso vinculadas por la rotación

$$\begin{aligned} x_1 &= y_0 \cos \vartheta - y_e \sin \vartheta, \\ x_2 &= y_0 \sin \vartheta + y_e \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (4.3)$$

En (4.2) aparece expresada la configuración del estado inicial por combinación lineal de todas las configuraciones posibles en el estado final. Los coeficientes $d_{s, N-s}^{r, N-r}$ se obtienen colocando en la ecuación (4.2) la definición de los polinomios de Hermite

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^r}{\sqrt{2^r r!} \sqrt{\pi}} \cdot \frac{(-1)^{N-r}}{\sqrt{2^{N-r} (N-r)!} \sqrt{\pi}} \cdot e^{x_1^2 + x_2^2} \frac{d^r e^{-x_1^2}}{dx_1^r} \frac{d^{N-r} e^{-x_2^2}}{dx_2^{N-r}} = \\ & = \sum d_{s, N-s}^{r, N-r} \frac{d^s e^{-y_0^2}}{dy_0^s} \frac{d^{N-s} e^{-y_e^2}}{dy_e^{N-s}} \cdot e^{y_0^2 + y_e^2} \frac{(-1)^s}{\sqrt{2^s s!} \sqrt{\pi}} \cdot \frac{(-1)^{N-s}}{\sqrt{2^{N-s} (N-s)!} \sqrt{\pi}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

⁽⁴⁾ Para un estudio detallado de esta teoría, ver: J. A. BALSEIRO, *Phys. Rev.*, 73, 1346, 1948.

Como las derivadas del primer miembro pueden escribirse

$$\frac{\partial^N e^{-x_1^2 - x_2^2}}{\partial x_1^r \partial x_2^{N-r}}$$

y, luego de aplicada la transformación (4.3), la derivada r -ésima según x_1 puede ser expresada simbólicamente por

$$\begin{aligned} \left(\cos \vartheta \frac{\partial}{\partial y_0} - \operatorname{sen} \vartheta \frac{\partial}{\partial y_e} \right)^r &= \\ &= \sum_{v=0}^r \binom{r}{v} (\cos \vartheta)^v (-\operatorname{sen} \vartheta)^{r-v} \frac{\partial^r}{\partial y_0^v \partial y_e^{r-v}}, \end{aligned}$$

resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial^N e^{-x_1^2 - x_2^2}}{\partial x_1^r \partial x_2^{N-r}} &= \left(\cos \vartheta \frac{\partial}{\partial y_0} - \operatorname{sen} \vartheta \frac{\partial}{\partial y_e} \right)^r \left(\operatorname{sen} \vartheta \frac{\partial}{\partial y_0} + \right. \\ &\quad \left. + \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial y_e} \right)^{N-r} e^{-y_0^2 - y_e^2} = \\ &= \left[\sum_{v=0}^r \binom{r}{v} (\cos \vartheta)^v (\operatorname{sen} \vartheta)^{r-v} (-1)^{r-v} \frac{\partial^r}{\partial y_0^v \partial y_e^{r-v}} \right] \\ &\quad \left[\sum_{\mu=0}^{N-r} \binom{N-r}{\mu} (\operatorname{sen} \vartheta)^\mu (\cos \vartheta)^{N-r-\mu} \frac{\partial^{N-r}}{\partial y_0^\mu \partial y_e^{N-r-\mu}} \right] e^{-y_0^2 - y_e^2} = \\ &= \sum_{v=0}^r \sum_{\mu=0}^{N-r} \binom{r}{v} \binom{N-r}{\mu} (\cos \vartheta)^{N-r-\mu+v} (\operatorname{sen} \vartheta)^{r+\mu-v} (-1)^{r-v} \\ &\quad \frac{\partial^N}{\partial y_0^{v+\mu} \partial y_e^{N-v-\mu}} e^{-y_0^2 - y_e^2}. \end{aligned}$$

Esta sumatoria doble la podemos escribir ahora agrupando todos los términos con el mismo índice $\mu + v = \text{const.} = s$. Así queda una sumatoria desde $s=0$ hasta $s=N$, y además, la sumatoria

$$D_{s, N-s}^{r, N-r} = \sum_{u=s-r}^s \binom{r}{s-u} \binom{N-r}{u} (\operatorname{sen} \vartheta)^{r-s+2u} (\cos \vartheta)^{N-r+s-2u} (-1)^{r-s+u},$$

donde m es el menor de los dos números s , $N-r$. Entonces la expresión (4.4) queda reducida a

$$\frac{e^{x_1^2+x_2^2}}{\sqrt{2^N r! (N-r)!} \pi} \sum_{s=0}^N D_{s, N-s}^{r, N-r} \frac{\partial^N e^{-y_0^2 - y_e^2}}{\partial y_0^s \partial y_e^{N-s}} =$$

$$= \sum_{s=0}^N \frac{e^{y_0^2 + y_e^2}}{\sqrt{2^N s! (N-s)!} \pi} d_{s, N-s}^{r, N-r} \frac{\partial^N e^{-y_0^2 - y_e^2}}{\partial y_e^{N-s} \partial y_0^s},$$

y, por comparación de coeficientes, resulta

$$d_{s, N-s}^{r, N-r} = \sqrt{\frac{s! (N-s)!}{r! (N-r)!}} \sum_{u=s-r}^m \binom{r}{s-u} \binom{N-r}{u}$$

$$(\cos \vartheta)^{N-r+s-2u} (\sin \vartheta)^{r-s+2u} (-1)^{r-s+u}. \quad (4.5)$$

Los coeficientes $d_{s, N-s}^{r, N-r}$ dan la probabilidad $d_{s, N-s}^{*, r, N-r}$ $d_{s, N-s}^{r, N-r}$ de la configuración descrita por $e^{-\frac{y_0^2}{2} - \frac{y_e^2}{2}} H_s(y_0) H_{N-s}(y_e)$. Según esto debe cumplirse, evidentemente $\sum_{s=0}^N d_{s, N-s}^{r, N-r} d_{s, N-s}^{*, r, N-r} = 1$.

Ahora consideremos el caso en el cual está excitada una sola onda, es decir, $r=N$ en (4.2). Obtenemos como probabilidad para cada configuración final posible

$$d_{s, N-s}^{N, 0} d_{s, N-s}^{*, N, 0} = (d_{s, N-s}^{N, 0})^2 = \frac{N!}{s! (N-s)!} (\sin^2 \vartheta)^{N-s} (\cos^2 \vartheta)^s. \quad (4.6)$$

Al mismo resultado se llega si dejamos incidir un fotón después de otro. En este caso, si p y q tienen, respectivamente, el significado que le hemos atribuido en el § 3, la probabilidad de que s sean registrados en uno de los rayos refractados y $N-s$ en el otro, es

$$\omega(s, N-s) = \binom{N}{s} p^s q^{N-s} \quad (4.7)$$

que, por (3.5), coincide con (4.6). La desviación cuadrática media de (4.6) o (4.7), es

$$\sqrt{\sigma^2} = \sqrt{Npq}, \quad (4.8)$$

y la desviación cuadrática media relativa

$$\frac{\sqrt{\sigma^2}}{Np} = \sqrt{\frac{q}{p} \frac{1}{N}}. \quad (4.9)$$

tiende hacia cero al aumentar el número de fotones.

5. — *La matriz de polarización* ⁽⁵⁾.

Si designamos con N_0 al operador de cantidad

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{d}{dy_0} + y_0^2 - 1 \right), \quad (5.1)$$

obtenemos

$$N_0 H_s(y_0) e^{-\frac{y_0^2}{2}} = s \cdot H_s(y_0) e^{-\frac{y_0^2}{2}}. \quad (5.2)$$

Es decir, el operador N_0 aplicado al polinomio de Hermite $H_s(y_0) e^{-\frac{y_0^2}{2}}$ nos da el número de fotones en la onda definida por y_0 .

Al operador N_0 le hacemos corresponder la matriz $\|N_0\|$, cuyos elementos $(N_0)_{rr'}$ estarán definidos por

$$(N_0)_{rr'} = \iint \Phi^{*r',N-r'}(y_0, y_e) N_0 \Phi^{r,N-r}(y_0, y_e) dy_0 dy_e, \quad (5.3)$$

donde

$$\Phi^{r,N-r} = \sum_{s=0}^N d_{s,N-s}^{r,N-r} H_s(y_0) \cdot H_{N-s}(y_e) e^{-\frac{y_0^2}{2} - \frac{y_e^2}{2}} \quad (5.4)$$

es la función de estado que describe todas las configuraciones posibles del rayo emergente, dada una configuración del rayo incidente. Resulta de (5.3) y (5.4)

⁽⁵⁾ Comunicación presentada a la 10ª Reunión de la AFA. Revista de la UMA-AFA, 13, 59, 1948.

$$(N_0)_{rr'} = \sum_{s=0}^N d_{s,N-s}^{*r',N-r'} d_{s,N-s}^{r,N-r} \cdot s = (N_0)_{r'r} \quad (5.5)$$

por ser los $d_{s,N-s}^{r,N-r}$ reales.

Si queremos expresar los $(N_0)_{rr'}$ en función del número de fotones y del ángulo ϑ , podemos poner

$$(N_0)_{rr'} = \iint H_r(x_1) H_{N-r'}(x_2) e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} N_0 H_r(x_1) H_{N-r}(x_2) e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} dx_1 dx_2, \quad (5.6)$$

que, por (4.2), coincide con (5.3) siempre y cuando expresemos el operador N_0 en función de x_1 y x_2 , mediante (4.3). Así, simbólicamente, podemos escribir

$$\frac{d^2}{dy_0^2} = \cos^2 \vartheta \frac{d^2}{dx_1^2} + \sen^2 \vartheta \frac{d^2}{dx_2^2} + 2 \sen \vartheta \cdot \cos \vartheta \frac{d^2}{dx_1 dx_2},$$

y, por lo tanto,

$$N_0 = \frac{1}{2} \left(-\cos^2 \vartheta \frac{d^2}{dx_1^2} - \sen^2 \vartheta \frac{d^2}{dx_2^2} - 2 \sen \vartheta \cdot \cos \vartheta \frac{d^2}{dx_1 dx_2} \right) + \frac{1}{2} (\cos^2 \vartheta \cdot x_1^2 + \sen^2 \vartheta \cdot x_2^2 + 2 \sen \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot x_1 x_2 - 1).$$

Ahora formamos los operadores

$$N_1 = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx_1^2} + x_1^2 - 1 \right), \quad N_2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx_2^2} + x_2^2 - 1 \right),$$

que operan sobre $H_r(x_1) \exp(-x_1^2/2)$ y $H_{N-r}(x_2) \exp(-x_2^2/2)$, respectivamente.

Así queda

$$N_0 = \cos^2 \vartheta N_1 + \sen^2 \vartheta N_2 + \cos \vartheta \sen \vartheta \left(x_1 x_2 - \frac{d^2}{dx_1 dx_2} \right).$$

Reemplazando en (5.6) se obtiene

$$(N_0)_{rr'} = r \cos^2 \vartheta \cdot \delta_{r,r'} + (N-r) \sen^2 \vartheta \cdot \delta_{r,r'} + \cos \vartheta \sen \vartheta \left\{ \sqrt{(r+1)(N-r)} \delta_{r',r+1} + \sqrt{r(N-r+1)} \delta_{r',r-1} \right\} \quad (5.7)$$

que es la expresión buscada.

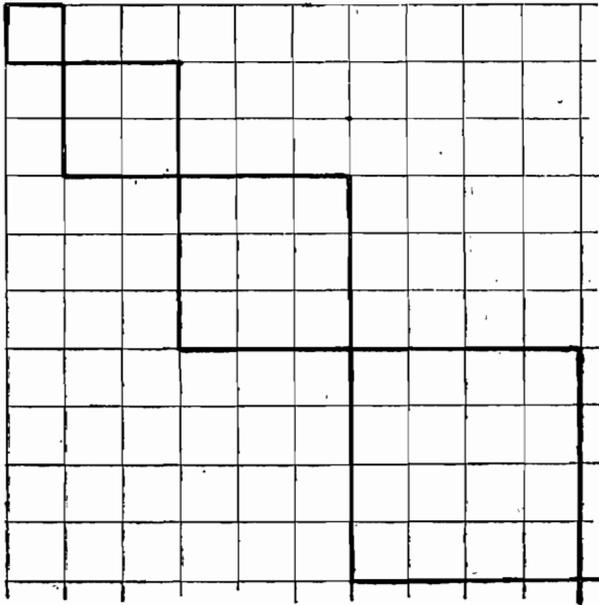
Los elementos diagonales de $\|N_0\|$ nos dan los valores medios del número de fotones en el rayo emergente, definido por la coordenada y_0 , si de un total de N inciden r en el rayo definido por x_1 .

La expresión

$$\sqrt{\sum_{r \neq r'} |(N_0)_{rr'}|^2} = \sqrt{2} |\operatorname{sen} \vartheta| |\cos \vartheta| \sqrt{r(N-r) + N/2} = \sqrt{(\sigma^2)_{rr}}, \quad (5.8)$$

da la desviación cuadrática media alrededor de los valores medios.

Por lo tanto el esquema



en el cual las sucesivas submatrices de rango 1, 2, 3, ... corresponden a $N=1, 2, 3, \dots$ fotones incidentes, puede representar la matriz general de polarización de cada uno de los rayos birrefractados por una placa birrefringente. En cada submatriz los elementos diagonales dan los valores medios observables del número de fotones en el rayo definido por y_0 ; la raíz de la suma de los cuadrados de los elementos de una columna o fila, excluido el elemento diagonal, la desviación cuadrática media.

Análogamente se puede formar la matriz $\|N_e\|$ con el ope-

rador $\frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx_2^2} + x_2^2 - 1 \right)$. Resulta para los elementos de esta matriz la expresión

$$\begin{aligned} (N_e)_{rr'} &= \sum_{s=0}^N d_{s,N-s}^{*r,N-r} d_{s,N-s}^{r,N-r} (N-s) = \\ &= r \operatorname{sen}^2 \vartheta \cdot \delta_{rr'} + (N-r) \cos^2 \vartheta \cdot \delta_{rr'} - \\ &\quad \cos \vartheta \cdot \operatorname{sen} \vartheta \left\{ \sqrt{(r+1)(N-r)} \delta_{r',r\pm 1} + \sqrt{r(N-r+1)} \delta_{r',r-1} \right\}. \end{aligned}$$

Es evidente que

$$\|N\| = \|N_0\| + \|N_e\|,$$

y

$$(N)_{rr'} = \sum_{s=0}^N d_{s,N-s}^{*r',N-r'} d_{s,N-s}^{r,N-r} (N-s+s) = N \delta_{rr'}.$$

La expresión (3.2) es el caso particular de la (5.7) para $N=1$.

6. — Conclusión.

Según el principio de correspondencia, la teoría clásica debe verificarse para un gran número de fotones. Si ponemos, como es habitual para un gran número de fotones,

$$r \text{ proporcional a } a_0^2 \quad \text{y} \quad N-r \text{ proporcional a } a_e^2, \quad (6.1)$$

coinciden los valores medios clásico y cuántico ((2.6) y (5.7)). En cambio, aún con (6.1), no coinciden las desviaciones cuadráticas medias (2.7) y (5.8). En el caso cuántico hay un término más debajo de la raíz que no tiene igual en el caso clásico. Este término expresa la contribución a la fluctuación proveniente de la existencia de fotones. Que esto es realmente así se ve en el caso en el cual está excitada una sola de las ondas incidentes, es decir, por ej., $a_e=0$ en (2.7) y $r=N$ en (5.8). Entonces, la fluctuación clásica se anula ya que no habrá diferencia de fase variable con el tiempo, es decir, las intensidades están unívocamente definidas independiente del tiempo. Por el contrario, en la fluctuación cuántica aún queda el término proporcional a \sqrt{N} , que proviene del hecho de que conocido el número de fo-

tones las fases están indeterminadas (principio de indeterminación). Sin embargo, el principio de correspondencia queda satisfecho ya que la desviación cuadrática media relativa (4.9) tiende hacia cero al aumentar el número de fotones.

Las fluctuaciones cuánticas, tratándose de fotones aislados, ya eran conocidas teórica y experimentalmente desde hace mucho tiempo, por ej., en el caso de radiación gama dura. La contribución de la electrodinámica cuántica es la de permitir estudiar el fenómeno, paso a paso, desde fotones aislados hasta un gran número de los mismos. Si quisiéramos comprobar experimentalmente, por ej., para un número de 1000 fotones, la desviación cuadrática media netamente cuántica, tendríamos que elegir el caso en el cual no aparece la contribución clásica. Es decir, el caso arriba discutido. Poniendo en (4.9), $\cos \vartheta = \sin \vartheta$, se obtiene para la desviación cuadrática media relativa $1/\sqrt{N}$. Para $N=1000$ fotones aún es de un 3 % (6). Luego, si tuviéramos instrumentos de medida que detectaran el número de fotones con un error menor que el 3 %, sería posible la verificación experimental de este efecto.

Quiero expresar aquí mi agradecimiento al Prof. G. Beck por haberme propuesto el tema y guiado durante la realización del trabajo y al Dr. E. Gaviola por su amable crítica.

Nota agregada en prensa: Recientemente, U. Fano, J. O. S. A., 39, 859, 1939, al tratar la polarización parcial en forma clásica y cuántica, indica un experimento (pensado) mediante el cual se podría determinar el grado de polarización de un haz luminoso. Es interesante la vinculación que establece entre el estado de polarización de la luz emitida y el conocimiento del estado mecánico de los átomos emisores. Así, un haz «completamente» polarizado se observa cuando se somete los átomos radiantes a un máximo conjunto de determinaciones antes y después de la emisión. Un haz de luz parcialmente polarizado, cuando es incompleta la determinación del estado mecánico de los átomos emisores. Según la interpretación de Fano nuestro haz incidente descrito por N_1 fotones polarizados en un cierto plano y $N_2 = N - N_1$ polarizados en un plano perpendicular, es un estado de polarización «parcial» totalmente definido.

(6) J. A. BALSEIRO, D. CANALS FRAU, *Cien. e Inv.*, 2, 444, 1946.