SOBRE DETERMINACION DE SINGULARIDADES DE LA SERIE DE TAYLOR, MEDIANTE EL ARGUMENTO DE SUS COEFICIENTES

por PEDRO PI CALLEJA

Resumen de la nota presentada el 30-IX-1949

E. Fabry publico en 1896 el teorema más profundo sobre la cuestión, que dice:

Si en la serie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{1.1}$$

que cumple

$$\text{lím}_n \sup |a_n|^{1/n} = 1, \tag{1.2}$$

para una sucesión ilimitada $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ tal que

$$\lim_{p=\infty} |a_{n_p}|^{1/n_p} = 1, \tag{1.3}$$

existe el

$$\lim_{m=\infty} (\operatorname{Arg} a_m - \operatorname{Arg} a_{m+1}) = \alpha \tag{1.4}$$

respecto a coeficientes consecutivos no nulos de índice m pertenecientes al entorno de Hadamard

$$n_p(1-\delta) < m < n_p(1+\delta), \quad (0<\delta<1), \tag{1.5}$$

salvo para q_p de estos coeficientes cumpliendo

$$(1.6) \qquad \lim_{p=\infty} (q_p/n_p) = 0,$$

entonces $e^{i\alpha}$ es punto singular de (1.1).

F a b r y hace notar que el límite (1.4) puede expresarse de muchas maneras y en particular es suficiente exista el

$$(1.7) \qquad \lim_{n=\infty} (\operatorname{Arg} a_n - \operatorname{Arg} a_{n+1}) = \alpha,$$

para que la serie (1.1) que cumple (1.2) tenga $e^{i\alpha}$ como punto singular.

Corolario inmediato de este caso particular es el llamado en la mayoría de los textos *teorema de Fabry*, aunque éste no lo enunció explícitamente, que en bella y simple formulación dice:

Si en la serie de potencias (1.1) existe el

$$(1.8) \qquad \lim_{n=\infty} (a_n/a_{n+1}) = e^{i\alpha}$$

entonces es $e^{i\alpha}$ punto singular de (1.1).

Paralelamente a su teorema argumental, F a b r y demostró el teorema lagunar siguiente:

Si en la serie (1.1) que cumple (1.2), existe la sucesión n_p tal que verifique (1.3) y

$$(1.9) \qquad \lim_{p-\infty} (q_p/n_p) = 0,$$

en que q_p es el número de coeficientes no nulos a_m de índice m pertenecientes al entorno de H a d a m a r d (1.5), entonces la circunferencia de convergencia $|z| = 1$ es frontera natural o línea singular de la serie (1.1).

De aquí se deduce como corolario que la serie

$$(1.10) \qquad f(z) = \sum_q a_q z^{n_q}$$

en que

$$(1.11) \qquad \lim_q \sup |a_q|^{1/n_q} = 1,$$

con

$$(1.12) \qquad \lim_{q\to\infty} (q/n_q) = 0,$$

tiene la circunferencia $|z|=1$ por frontera natural.

Ambos teoremas argumental y lagunar son consecuencia del importante teorema previo de Fabry que dice:

Supongamos que la serie (1.1) tenga radio de convergencia 1 y que existan para cada número natural p un entero $n_p \geqq 0$ y un número real Θ_{n_p} tales que los n_p crezcan y las partes reales $\mathcal{R}(a_m e^{-i\Theta_{n_p}})$ para los m pertenecientes al entorno de Hadamard (1.5) tengan q_p cambios de signo (de $+$ a $-$ o de $-$ a $+$, omitiendo ceros), con q_p cumpliendo (1.6) y siendo $\lim_p \sup |\mathcal{R}(a_{n_p} e^{-i\Theta_{n_p}})|^{1/n_p} = 1$; entonces $z=1$ es punto singular de (1.1).

Si en este teorema se toma $\Theta_{n_p} = \Theta$ constante, $n_p = p$, $q_p = 0$, se obtiene el teorema que P. Dienes enunció trece años más tarde en 1909 y que dice:

Bajo la hipótesis (1.2), es suficiente que desde un valor de n en adelante, todos los afijos de los coeficientes a_n se encuentren en un ángulo β menor que π y de vértice en el origen para que el punto $z=1$ sea singular de (1.1).

De este teorema es inmediato corolario el teorema, históricamente precursor de los demás, enunciado en 1893 por G. Vivanti y primeramente demostrado en 1894 por A. Pringsheim, que dice:

Bajo la hipótesis (1.2), es suficiente que desde un valor de n en adelante sean positivos o nulos los coeficientes a_n para que el punto $z=1$ sea singular.

El análisis de E. Fabry, realizado mediante los métodos geniales de J. Hadamard, es de una profundidad admirable, pero sus demostraciones son muy complicadas; además E. Fabry da gran número de resultados en forma discursiva y aglomerada, sin hacerlos resaltar en enunciados aislados y clarificados. Así el teorema atribuído a P. Dienes tiene una demostración mucho más sencilla que los de Fabry.

Si en el lagunar de éste, la condición (1.12) se sustituye por la

$$\lim_{q\to\infty} (n_{q+1} - n_q) = \infty \tag{1.13}$$

que implica la (1. 12), la conclusión subsiste. La (1. 12) es más amplia que la (1. 13), porque aquélla no implica ésta, como se ve tomando $n_{2q} = q^2$, $n_{2q+1} = q^2 + 1$.

La condición restringida de Fabry (1. 13) es una generalización de la condición lagunar de Hadamard en la que en vez de (1. 12) o (1. 13) se supone más restringidamente que los índices de los coeficientes no nulos de (1. 10), (1. 11) cumplen

$$n_{q+1} - n_q > \delta\, n_q, \qquad (\delta > 0), \tag{1.14}$$

desde un cierto valor de q en adelante, como condición suficiente para que la circunferencia $|z| = 1$ sea línea singular de (1. 10). El teorema lagunar de Hadamard de 1892 puede demostrarse mucho más fácilmente que el de Fabry y con la misma simplicidad surge paralelamente un teorema argumental de criterio suficiente para asegurar el carácter singular de $z = 1$, que constituye una amplia generalización del teorema de Dienes, con demostración casi tan sencilla como la de éste. Enunciar y demostrar, en la forma más simple posible, este teorema argumental es el objeto principal de la nota presentada, aparte de observaciones originales realizadas al aplicar la transformación de Euler a los teoremas expuestos, transformación que ya Fabry empleó en su memoria de 1898 junto con expresiones en que figuran las diferencias finitas de los coeficientes de la serie de Taylor. Anque no contenga esencialmente nada nuevo, A. Pringsheim expuso con gran claridad en 1912 la aplicación de dicha transformación de Euler al estudio de la cuestión expuesta.

El teorema argumental, paralelo al lagunar de Hadamard y que representa una esencial y amplia generalización del teorema de Dienes es el siguiente:

Para que la función analítica $f(z)$ representada por la serie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{1.1}$$

en que se supone

$$\text{lím}_n \sup |a_n|^{1/n} = 1, \tag{1.2}$$

tenga $z = 1$ como punto singular, es suficiente que a una de las sucesiones $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ para las que

$$\lim_{p=\infty} |a_{n_p}|^{1/n_p} = 1, \tag{1.3}$$

corresponda un número positivo $\delta > 0$, tan pequeño como se quiera, pero independiente de n_p, tal que todos los coeficientes no nulos a_m de índice m pertenecientes al entorno de Hadamard,

$$n_p(1-\delta) < m < n_p(1+\delta), \quad (\delta > 0) \tag{1.5}$$

estén en un mismo ángulo β_{n_p} (variable con n_p) de vértice en el origen y amplitud $\pi - 2\delta$. Precisando más, es suficiente exista una sucesión de argumentos $\Theta_{n_1}, \Theta_{n_2}, \ldots, \Theta_{n_p}, \ldots$, tales que

$$\Theta_{n_p} - {}^1/_2\,\pi + \delta < \operatorname{Arg} a_{n_p} < \Theta_{n_p} + {}^1/_2\,\pi - \delta, \tag{1.15}$$

$$\Theta_{n_p} - {}^1/_2\,\pi \leqq \operatorname{Arg} a_m \leqq \Theta_{n_p} + {}^1/_2\,\pi \tag{1.16}$$

para todos los coeficientes no nulos $a_m \neq a_{n_p}$ pertenecientes al entorno (1.5). *Más restringidamente, basta que las condiciones* (1.15) *y* (1.16) *se cumplan desde un cierto valor de n en adelante, para todo n.*

Corolario inmediato de este teorema es el que dice:

Es suficiente que en la serie (1.1) *que cumple* (1.2) *pueda fijarse un valor de $K > 0$, independiente de n, tal que se cumpla*

$$|\operatorname{Arg} a_n - \operatorname{Arg} a_{n+1}| < K/n, \tag{1.17}$$

para que el punto $z = 1$ sea singular. En caso de haber coeficientes nulos, se supone que la condición (1.17) *se aplica a coeficientes consecutivos no-nulos. Mediante un giro tendríamos el criterio análogo para que $z = e^{i\alpha}$ fuese singular.*

E. Fabry consigue mejorar esencialmente (1.17) mediante su condición (1.7).

La demostración del teorema argumental dado y del lagunar de Hadamard se basan esencialmente en el teorema:

Si para dos sucesiones b_n y c_n se cumple

$$\text{lím}_n \sup |b_n|^{1/n} < \text{lím}_n \sup |c_n|^{1/n}, \tag{1.18}$$

entonces es

$$\text{lím}_n \sup |b_n + c_n|^{1/n} = \text{lím}_n \sup |c_n|^{1/n}. \tag{1.19}$$

Este teorema implica que es suficiente que la serie lagunar (1.10) verificando (1.11), cumpla además

$$\text{lím}_q \sup \binom{2n_q}{n_{q-1}}^{1/2n_q} < 2, \tag{1.20}$$

para que tenga la circunferencia de convergencia $|z| = 1$ por frontera natural.

Entonces, *la investigación de los valores óptimos que cumplan* (1.20) *nos lleva al teorema lagunar de* Hadamard, *así como al argumental paralelo a éste, los que por tanto sólo podrán mejorarse apelando a recursos más poderosos que los proporcionados por el teorema* (1.18), (1.19).

Finalmente diremos que mediante la transformación de Euler y las diferencias finitas

$$\Delta^n a_1 = a_{n+1} - \binom{n}{1} a^n + \binom{n}{2} a_{n-1} + \ldots + (-1)^n a_1, \tag{1.21}$$

puede establecerse que:

Bajo la hipótesis (1.2), *la condición necesaria y suficiente para que la función analítica* $f(z)$ *definida por la serie* (1.1) *y sus prolongaciones analíticas tenga el punto* $z = 1$ *como único punto singular, es que se cumpla*

$$\text{lím}\, |\Delta^n a_1|^{1/n} = 0, \tag{1.22}$$

en que es esencial se tomen las diferencias finitas respecto al coeficiente a_1, *si no se prescinde de la consideración del punto impropio.*

La Plata, septiembre 1949.