LAS POTENCIAS DE LOS NUMEROS TRIANGULARES

por PEDRO A. PIZÁ
(San Juan de Puerto Rico)

Desde la más remota antigüedad se conocen los dos teoremas siguientes:

I. El número triangular de orden x, $t=x(x+1)/2$, es igual a la suma de los primeros x números enteros.

II. El cuadrado del número triangular de orden x es igual a la suma de los primeros x cubos.

Ambos teoremas se prueban fácilmente por inducción, siendo los ejemplos ideales de este método de prueba que presentan casi todos los libros de texto.

Vamos a demostrar que estos dos teoremas clásicos son casos particulares del siguiente teorema generalizado que hemos hallado recientemente y que consideramos nuevo:

III. La ene-ava potencia del número triangular de orden x es igual al valor promedio de las 2^{n-1} sumas de potencias contenidas en la sumación $\sum\limits_{c\geq 1}\binom{n}{2c-1} S_x^{2n+1-2c}$, donde $\binom{n}{2c-1}$ es el $2c$-avo coeficiente binomio de orden n, y

$$S_x^{2n+1-2c}=\sum_{a=1}^{x} a^{2n+1-2c}.$$

La relación generalizada que expresa el Teorema III es la siguiente:

$$\left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^n=\frac{\sum\limits_{c\geq 1}\binom{n}{2c-1} S_x^{2n+1-2c}}{2^{n-1}}. \tag{1}$$

Multipliquemos cada miembro de la ecuación (1) por 2^{n-1} para obtener

$$\frac{(x^2+x)^n}{2} = \sum_{c \geq 1} \binom{n}{2c-1} S_x^{2n+1-2c}, \tag{2}$$

relación que demostraremos que es válida para todo valor entero positivo de x y de n.

Cuando $x = 1$, $S_x^m = 1$; y $\dfrac{2^n}{2} = \sum_{c \geq 1} \binom{n}{2c-1} = 2^{n-1}$,

que es una propiedad conocida de los coeficientes binomios, la cual confirma el aserto que hacemos en nuestro Teorema III sobre el número de S_x^m contenidos en la sumación

$$\sum_{c \geq 1} \binom{n}{2c-1} S_x^{2n+1-2c}.$$

Supongamos que la relación (2) es válida cuando $x = y - 1$, $y > 1$, de modo que

$$\frac{(y-1)^n y^n}{2} = \frac{(y^2-y)^n}{2} = \sum_{c \geq 1} \binom{n}{2c-1} S_{y-1}^{2n+1-2c}.$$

Sumémosle la identidad

$$\frac{(y^2+y)^n - (y^2-y)^n}{2} = \sum_{c \geq 1} \binom{n}{2c-1} y^{2n+1-2c}$$

para obtener

$$\frac{(y^2+y)^n}{2} = \sum_{c \geq 1} \binom{n}{2c-1} \left[S_{y-1}^{2n+1-2c} + y^{2n+1-2c}\right]$$

$$= \sum_{c \geq 1} \binom{n}{2c-1} S_y^{2n+1-2c},$$

quedando así perfeccionada la demostración de (2) y de (1) por inducción matemática, y por lo tanto demostrado nuestro Teorema III en toda generalidad.

Las relaciones (2) nos proporcionan un sistema de ecuaciones simultáneas que permiten obtener las fórmulas que dan los valores de S_x^{2r+1} en función de x, para $r=1,2,3,\ldots$ y que son las famosas fórmulas que presentó Jacques Bernoulli en su obra póstuma *Ars Conjectandi,* y en las que descubrió los números fraccionarios que más tarde fueron llamados Números de Bernoulli por Leonardo Euler.

San Juan, Puerto Rico, 31 de mayo de 1949.

CRONICA

SESIONES CIENTIFICAS DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

El 30 de setiembre de 1949, la Unión Matemática Argentina celebró una sesión científica en el local del Instituto de Matemática de Buenos Aires (Luis Sáenz Peña 1465), en la que se consideraron las siguientes comunicaciones:

ALBERTO GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre la teoría de las señales analíticas.*

Se da una formulación rigurosa de la teoría de las señales analíticas de Gabor, de las Δ positivas y negativas de Heisenberg y de los potenciales y spinores positivos y negativos de Schwinger, recurriendo a la clásica descomposición de una función arbitraria en suma de dos componentes que son límites de funciones analíticas en sendos semiplanos.

PEDRO PI CALLEJA. *Determinación de las singularidades de la serie de Taylor mediante sus coeficientes.*

O. A. VARSAVSKY. *El teorema ergódico en la Mecánica cuántica.*

Se construye un espacio apropiado para el estudio de corrientes de operadores (dimensión finita) y en él se estudia el significado físico de la transitividad métrica.

A. BLANC LAPIERRE. *Una manera de introducir la distribución de Poisson.*

A. BLANC LAPIERRE. *Extensión de un teorema relativo a la frecuencia instantánea.*

M. COTLAR. R. RICABARRA. *La integral de Caratheodory.*

La teoría de Daniell, recientemente perfeccionada por N. Lourbaki y M. H. Stone, considera una funcional lineal sobre un látice vectorial y logra un tratamiento uniforme para la integral y la medida de Lebesgue. Pero ella no abarca la medida exterior de Caratheodory. Nuestro objeto es mostrar que considerando funciones convexas se llega a una teoría mucho más amplia que abarca a todas éstas. Ella permite además una mayor unificación de los dos tipos de integral: Riemann y Lebesgue. La diferencia entre ambas aparece en el hecho de tener espectro vacío las funciones integrables Lebesgue. Finalmente en el caso importante de espacios topológicos se obtiene una generalización natural de la teoría clásica.