TRANSFORMACION DE CONFIGURACIONES Y FLUCTUACIONES DE CAMPOS CUANTICOS ESTACIONARIOS

por José A. Balseiro
Instituto de Física. – La Plata
(Recibido el 9 Mayo 1950)

Summary. In a previous paper, quoted below, we have dealt with the problem of the transformation of configurations of the radiation field. The generalization for quantum fields satisfying Bose-Einstein statistics is immediately obtained. For quantum fields satisfying Fermi-Dirac statistics a particular representation of the wave functions is chosen, which permits, in a simple way, to find the particle distribution. The problem arises if we deal with the passage of a particle field through a physical apparatus without absorption and in the case that the field can be considered stationary. The description of the field requires a particle distribution to be given over the states of an orthogonal system of vibration satisfying the field equations, and after the fields passage through the apparatus, it will be, in general, convenient to describe the field in terms of another orthogonal system, for which the particle distribution remains to be determined. The problem is of interest in particular with respect to the fluctuation phenomena, for which we obtain expressions which resemble those of fields in thermodynamic equilibrium, for they contain a term that gives the classical fluctuations of particles and further, other terms, which must be attributed to interferences.

§ 1. - *Introducción.* Trataremos el problema de obtener una descripción completa de campos estacionarios de partículas en el caso en que, estando dada una configuración de campo referida a los estados de un sistema ortonormal de soluciones de las ecuaciones de campo, se adopta para la descripción del mismo otro sistema ortonormal de soluciones.

El problema se origina al considerar el pasaje de un campo de partículas por un dispositivo, idealmente supuesto sin absorción, y en el caso en que el campo puede ser considerado estacionario (por ej. radiación que atraviesa un sistema óptico, partículas cargadas en un sistema de campos electro-magnetostático, espectrógrafo de masa, etc). El campo descripto inicialmente mediante un sistema de soluciones f_r será conveniente, después de atravesar el dispositivo, describirlo mediante otro sistema de soluciones F_s, respecto de cuyos estados se trata de determinar la distribución de partículas. Es también el caso en que, por la naturaleza del problema o por las condiciones de contorno, el campo se describe mediante cierto sistema de soluciones de las ecuaciones de campo y por las condiciones de observación es necesario adoptar una representación mediante otro sistema de soluciones de estas ecuaciones. Tal por ej. el campo descripto mediante ondas esféricas observado dentro de ángulos sólidos pequeños (ondas planas).

Si bien las condiciones impuestas (campos estacionarios y conservación del número total de partículas asociadas al campo) restringen considerablemente la generalidad del problema, éste es, sin embargo, de interés en lo concerniente a una mejor comprensión del mecanismo de los campos cuánticos y, en particular, en lo referente a los fenómenos de fluctuaciones que aparecen y que, en condiciones adecuadas, podrían permitir verificaciones experimentales.

En un trabajo previo (¹) hemos tratado la transformación de configuraciones del campo de radiación, determinándose la distribución de fotones sobre los estados del segundo sistema de soluciones de las ecuaciones de campo. La correspondiente generalización para campos cualesquiera de estadística Bose-Einstein $(B—E)$ es inmediata, pues el tipo de estas transformaciones depende solamente de las relaciones de conmutación de los operadores de amplitud.

Tratándose de campos de partículas de estadística Fermi-Dirac una representación adecada de las autofunciones del hamiltoniano permite, en forma simple resolver el mismo problema para esta clase de campos.

Sea ϕ el operador de campo expresado mediante un sistema de soluciones f_r de las ecuaciones de campo:

$$\phi = \sum_r a_r f_r + a_r^+ f_r^* \qquad (1.1)$$

siendo a_r y a_r^+ los operadores de amplitud que involucran los factores periódicos $\exp\left(\frac{2\pi i}{h} E_r t\right)$ y $\exp\left(-\frac{2\pi i}{h} E_r t\right)$, respec-

(¹) J. A. Balseiro, *Revista de la Unión Mat. Arg.* vol. XIV, pág. 64, 1949.

tivamente, llamando E_r a la energía de la partícula asociada al estado r. Consideramos, por otra parte, a ϕ expresada mediante otro sistema de soluciones F_s de las mismas ecuaciones de campo,

$$\phi = \sum_s b_s F_s + b_s^+ F_s^* \tag{1.2}$$

siendo b_s y b_s^+ los operadores de amplitud referidos al nuevo sistema de soluciones, vinculadas con las anteriores mediante la transformación unitaria

$$f_r = \sum_s C_{rs} F_s \tag{1.3}$$

transformación, ésta, que establece entre los operadores de amplitud las relaciones de transformación

$$a_r = \sum_s C_{rs}^* b_s \tag{1.4}$$

$$b_s = \sum_r C_{rs} a_r. \tag{1.4'}$$

Si se da una distribución de partículas sobre los estados del sistema de soluciones f_r expresada mediante la autofunción $\gamma(n_1 n_2 \ldots)$ del hamiltoniano del campo referido a este sistema, el problema de determinar la distribución de partículas sobre los estados del sistema F_s, se resuelve encontrando la autofunción transformada de $\gamma(n_1 n_2 \ldots)$ expresable mediante la combinación lineal

$$\sum_m d(n_1 n_2 \ldots / m_1 m_2 \ldots)\, \Gamma(m_1 m_2 \ldots) \quad (\Sigma n_r = \Sigma m_s = N)$$

en donde $\Gamma(m_1 m_2 \ldots)$ se refieren a cada una de las configuraciones de campo referidas al sistema F_s. La probabilidad de la configuración a la cual se refiere esta autofunción queda dada por $W(n_1 n_2 \ldots / m_1 m_2 \ldots) = d^*(n_1 n_2 \ldots / m_1 m_2 \ldots)\, d(n_1 n_2 \ldots / m_1 m_2 \ldots)$.

El valor medio del número de partículas asociadas al estado t, perteneciente al sistema de soluciones F_s, se define:

$$\overline{m}(n_1 n_2 \ldots / t) = \sum_m m_t\, W(n_1 n_2 \ldots / m_1 m_2 \ldots m_t \ldots). \tag{1.5}$$

entendiéndose que la suma sobre m debe efectuarse sobre todos los valores de m compatibles con $\sum_s m_s = \sum_r n_r = N$.

La dispersión media respecto del valor medio o fluctuación queda dada por

$$\sigma^2(n_1 n_2 \ldots / t) = \overline{m}^2(n_1 n_2 \ldots / t) - [\overline{m}(n_1 n_2 \ldots / t)]^2 \qquad (1.6)$$

siendo

$$\overline{m}^2(n_1 n_2 \ldots / t) = \sum_m m_t^2 \, W(n_1 n_2 \ldots / m_1 m_2 \ldots m_t \ldots) \qquad (1.7)$$

Se encuentra para estas fluctuaciones expresiones que contienen términos que dan las fluctuaciones clásicas de partículas y términos atribuíbles a interferencias propias de una y otra de las estadísticas cuánticas, en forma que recuerdan las expresiones correspondientes a fluctuaciones de campos cuánticos en equilibrio termodinámico. En el caso de estadística B—E cuando el número de partículas asociadas a cada estado del campo es suficientemente grande las fluctuaciones de partículas desaparecen quedando únicamente las debidas a interferencias.

I. - *Fluctuaciones clásicas*

§ 2. - *Fluctuaciones de partículas.* Consideraremos, respecto de las fluctuaciones de partículas clásicas, un ejemplo que nos servirá como punto de comparación referente a los resultados que enunciaremos más adelante y que, por otra parte, no está desarrollado, con la generalidad que lo necesitamos, en los tratados de estadística (²).

Sean N cajas que contienen esferas: n_1 la primera, n_2 la segunda ... n_N la Nma. Estas esferas pueden caer al azar en M celdas de distintas dimensiones y disposición. Sean P_{11}, $P_{12} \ldots P_{1M}$, las probabilidades que una esfera de la caja 1 caiga en las celdas $1, 2, \ldots M$ma. $P_{21}, P_{22} \ldots P_{2M}$, las probabilidades correspondientes a una esfera proveniente de la caja 2, etc. De esta

(²) Ver p. e. R. B. LINDSAY, *Introduction to physical statistics*, Cap. VII, § 3, (John Wiley & Sons, New York, 1941).

manera definimos las $N \times M$ probabilidades elementales P_{ji}. Si introducimos el polinomio

$$Z_j = \sum_{i=1}^{M} P_{ji} \, y_i$$

se demuestra que en el desarrollo:

$$Z_1^{n_1} Z_2^{n_2} \ldots Z_N^{n_N} = \\ = \sum_{m_1 m_2 \ldots} w(n_1 n_2 \ldots / m_1 m_2 \ldots) \, y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_M^{m_M} (\Sigma \, n_i = \Sigma \, m_i)$$

los coeficientes $w(n_1 n_2 \ldots / m_1 m_2 \ldots)$ dan la probabilidad que $m_1, m_2, \ldots m_M$ esferas caigan, respectivamente, en las celdas $1, 2, \ldots M$.

Observando que $Z_j = 1$ para $y_1 = y_2 = \ldots = y_M = 1$, calculamos el valor medio del número de esferas que caen en la celda t de la siguiente manera:

$$\overline{m}(n_1 n_2 \ldots / t) = \sum_m m_t \, w(n_1 n_2 \ldots / m_1 m_2 \ldots) = \\ = \left[\frac{\partial}{\partial y_t} (Z_1^{n_1} Z_2^{n_2} \ldots Z_N^{n_N}) \right]_{y_1 = y_2 = \ldots 1} = \sum_r n_r P_{rt}. \qquad (2.1)$$

Calculando el valor medio cuadrático $\overline{m}^2(n_1 n_2 \ldots / t)$ de manera análoga, mediante una segunda derivación de $Z_1^{n_1} Z_2^{n_2} \ldots Z_N^{n_N}$ obtenemos para la dispersión media cuadrática, según la definición (1.6), la expresión:

$$\sigma^2(n_1 n_2 \ldots / t) = \sum_{r=1}^{N} n_r P_{rt} (1 - P_{rt}). \qquad (2.2)$$

Cuando $N = 1$ esta expresión se reduce:

$$\sigma^2(0.0 \ldots n_r 0 \ldots 0/t) = n_r P_{rt} (1 - P_{rt}). \qquad (2.3)$$

§ 3. - *Fluctuaciones debidas a interferencias.* Paralelamente al ejemplo del parágrafo anterior trataremos un ejemplo en el que quedan de manifiesto las fluctuaciones clásicas, debidas a interferencias, de un campo de radiación estacionario.

Sea B_t una onda electromagnética expresada en función de ciertas soluciones particulares A_r de las ecuaciones de Maxwell:

$$B_t = \sum_r C_{rt} A_r = \sum_r \alpha_{rt} e^{i\varphi_{rt}} A_r$$

donde hemos expresado explícitamente las fases relativas:

$$C_{rt} = \alpha_{rt} e^{i\varphi_{rt}} \quad , \quad |C_{rb}| = \alpha_{rt}.$$

La intensidad I_t de la radiación es proporcional al cuadrado del módulo de B_t:

$$I_t \sim |B_t|^2 = \sum_r \alpha_{rt} |A_r|^2 + \sum_{r \neq r'} \alpha_{rt} \alpha_{r't} e^{i(\varphi_{rt} - \varphi_{r't})} A_{r'}^* A_r.$$

El valor medio de la intensidad se obtiene promediando sobre todas las fases relativas

$$\overline{I_t} \sim \sum_r \alpha_{rt}^2 |A_r|^2 = \sum_r |C_{rt}|^2 |A_r|^2. \qquad (3.1)$$

De la misma manera obtenemos la intensidad media cuadrática:

$$\overline{I_t^2} \sim \sum_r \alpha_{rt}^4 |A_r|^4 + 2 \sum_{r \neq r'} |C_{rt}|^2 |C_{r't}|^2 |A_r|^2 |A_{r'}|^2$$

con lo cual calculamos la dispersión media cuadrática:

$$\sigma_t^2 = \overline{I_t^2} - (\overline{I_t})^2 \sim \sum_{r \neq r'} |C_{rt}|^2 |C_{r't}|^2 |A_r|^2 |A_{r'}|^2. \qquad (3.2)$$

Teniendo presente que $|A_r|^2$ es proporcional al número n_r de fotones asociados al estado r podemos expresar la (3.1) y (3.2) en la forma:

$$\overline{I_t} \sim \sum_r n_r |C_{rt}|^2. \qquad (3.1')$$

$$\sigma_t^2 \sim \sum_{r \neq r'} n_r n_{r'} |C_{rt}|^2 |C_{r't}|^2. \qquad (3.2')$$

II. - *Campos de estadística Bose-Einstein*

§ 4. - *Probabilidad de una configuración de campo.* Se demuestra que las autofunciones del hamiltoniano de campos de estadística B—E $\gamma(n_1 n_2 \ldots)$, admiten la representación ([3])

$$\gamma(n_1 n_2 \ldots) = \frac{\mathfrak{Z}_1^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{\mathfrak{Z}_2^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

siendo $\mathfrak{Z}_r = -i a_r$.

Mediante esta representación, la transformación de las autofunciones a las correspondientes autofunciones referidas al sistema de soluciones F_s se reduce a una transformación de coordenadas dada por la transformación ortogonal (1. 4), de modo que:

$$\gamma(n_1 n_2 \ldots) = \frac{\mathfrak{Z}_1^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{\mathfrak{Z}_2^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} \ldots = \sum_{m_1 m_2 \ldots} \delta(n_1 n_2 \ldots / m_1 m_2 \ldots) \frac{Z_1^{m_1}}{\sqrt{m_1!}} \frac{Z_2^{m_2}}{\sqrt{m_2!}}$$

$$\ldots = \sum_{m_1 m_2 \ldots} \delta(n_1 n_2 \ldots / m_1 m_2 \ldots) \, \Gamma(m_1 m_2 \ldots). \qquad (4.\,1)$$

Formando el desarrollo de $\frac{Z_1^{m_1}}{\sqrt{m_1!}} \frac{Z_2^{m_2}}{\sqrt{m_2!}} \ldots$ en función de $\frac{\mathfrak{Z}_1^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{\mathfrak{Z}_2^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} \ldots$ mediante la (1. 4') se demuestra que

$$\delta^*(n_1 n_2 \ldots / m_1 m_2 \ldots) = \delta(m_1 m_2 \ldots / n_1 n_2 \ldots) \qquad (4.\,2)$$

y, además, que estos coeficientes cumplen la propiedad

$$\sum_{m_1 m_2 \ldots} \delta^*(n_1 n_2 \ldots n_r \ldots / m_1 m_2 \ldots) \, \delta(n_1 n_2 \ldots n'_r \ldots / m_1 m_2 \ldots) = \delta_{n_r n'_r} \qquad (4.\,3)$$

En esta forma la probabilidad de la configuración de cam-

([3]) *Loc. cit.* § 1.

po referida al sistema de soluciones F_s a la cual corresponde $E(m_1 m_2 \ldots)$ queda determinada por

$$W(n_1 n_2 \ldots / m_1 m_2 \ldots) = \delta^*(n_1 n_2 \ldots / m_1 m_2 \ldots)\delta(n_1 n_2 \ldots / m_1 m_2 \ldots). \tag{4. 4}$$

En el caso de una sola partícula presente en la representación original del sistema f_r, en el estado r observable en el sistema F_s en el estado t está dado por $C_{rt}^* C_{rt}$. Las probabilidades elementales de los estados del segundo sistema referidos a los estados del primero están dado, pues, por

$$P_{rt} = C_{rt}^* C_{rt} = |C_{rt}|^2. \tag{4. 5}$$

§ 5. - *Valores medios y fluctuaciones.* Teniendo en cuenta la definición general del valor medio (1. 5), la expresión (4. 4) se demuestra (Apén. § 1) que el valor medio del número de partículas asociadas al estado t (perteneciente al sistema F_s) está dada por:

$$\overline{m}(n_1 n_2 : / t) = \sum_r n_r |C_{rt}|^2. \tag{5. 1}$$

Análogamente, el correspondiente valor medio cuadrático:

$$\overline{m^2}(n_1 n_2 \ldots / t) = \sum_r (n_r |C_{rt}|^2)^2 + \sum_r n_r |C_{rt}|^2 \sum_{r' \neq r} (n_{r'} + 1) |C_{r't}|^2$$

con lo cual encontramos según la definición (1. 6), para la desviación media la expresión:

$$\sigma^2(n_1 n_2 \ldots / t) = \sum_r n_r |C_{rt}|^2 (1 - |C_{rt}|^2) + \sum_{r \neq r'} n_r n_{r'} |C_{rt}|^2 |C_{r't}|^2. \tag{5. 2}$$

Teniendo en cuenta la notación y el significado de (4. 5) podemos expresar a la (5. 1) y (5. 2) en la forma:

$$\overline{m}(n_1 n_2 \ldots / t) = \sum_r n_r P_{rt} \tag{5. 1'}$$

$$\sigma^2(n_1 n_2 \ldots / t) = \sum_r n_r P_{rt}(1 - P_{rt}) + \sum_{r \neq r'} n_r n_{r'} P_{rt} P_{r't}. \tag{5. 2'}$$

En el caso en que en la representación original solamente el estado r está ocupado por n_r partículas la (5. 2') se reduce a

$$\sigma^2(0,0 \ldots n_r \ldots 0/t) = n_r P_{rt}(1 - P_{rt}). \tag{5. 3}$$

Además, la fluctuación dada por la (5. 2) puede, también expresarse en la forma:

$$\sigma^2(n_1 n_2 \ldots/t) = \overline{m}(n_1 n_2 \ldots/t) + \\ + [\overline{m}(n_1 n_2 \ldots/t)]^2 - \sum_r n_r(n_r + 1)\,(C_{rt}{}^* C_{rt})^2$$

que nos permite, formando la dispersión relativa:

$$\left[\frac{\sigma(n_1 n_2 \ldots/t)}{\overline{m}(n_1 n_2 \ldots/t)}\right]^2 = \frac{1}{\overline{m}(n_1 n_2 \ldots/t)} + 1 - \\ - \frac{1}{[\overline{m}(n_1 n_2 \ldots/t)]^2} \sum_r n_r(n_r + 1)\,(C_{rt}{}^* C_{rt})^2$$

discutir el caso en que, en la representación original, los estados están ocupados por un gran número de partículas de modo que $n_r \gg 1$. En efecto, en tal caso el primer término se anula de modo que podemos dar para las fluctuaciones el valor asintótico:

$$\sigma^2(n_1 n_2 \ldots/t) \backsimeq \sum_{r \neq r'} n_r n_{r'} |C_{rt}|^2 \, |C_{r't}|^2. \tag{5. 4}$$

III. - *Campos de estadística Fermi-Dirac*

§ 6. - *Probabilidad de una configuración de campo.* Para los campos de estadística $F-D$ es posible escoger una representación de las autofunciones del hamiltoniano en la cual los operadores de amplitud $a_{r_1}, a_{r_2} \ldots$ considerados como variables no conmutables, describen los estados $r_1, r_2 \ldots$ ocupados por una partícula y $a_{r_1}{}^*, a_{r_2}{}^* \ldots$ los mismos estados vacíos. En esta representación las autofunciones $\psi_{r_1}(q_1)\, \psi_{r_2}(q_2) \ldots$ expresadas en función de las coordenadas de partículas se transforman en (Apén. § 2):

$$\gamma(r_1 r_2 \ldots r_N) = a_{r_1} a_{r_2} \ldots a_{r_N} \tag{6. 1}$$

donde es necesario tener en cuenta que las variables a_r anticonmutan entre sí. Por ello convendremos en ordenar los factores en forma que los índices formen una sucesión creciente. Por otra parte, el principio de exclusión expresado $a_r a_r = 0$, implica que cada una de las configuraciones de campo representada por $\gamma(r_1 r_2 \dots)$ no contiene dos índices iguales.

Las autofunciones $\gamma(r_1 r_2 \dots)$ referidas a los estados del sistema de soluciones f_r de las ecuaciones de campo se transforman, mediante (1.4) en:

$$\gamma(r_1 r_2 \dots r_N) = a_{r_1} a_{r_2} \dots a_{r_N} = \sum_{s_1 < s_2 \dots} \Delta(r_1 r_2 \dots / s_1 s_2 \dots) \, b_{s_1} b_{s_2} \dots b_{s_N} =$$
$$= \sum_{s_1 < s_2 \dots} \Delta(r_1 r_2 \dots / s_1 s_2 \dots) \, E(s_1 s_2 \dots s_N) \, , \qquad (6.2)$$

en donde $E(s_1 s_2 \dots s_N)$ corresponde a cada uno de los estados individuales del sistema de soluciones F_s.

Los coeficientes $\Delta(r_1 r_2 \dots r_N / s_1 s_2 \dots s_N)$ resulten ser los determinantes menores del determinante unitario $\|C_{rs}^*\| = 1$ y de orden igual al número N de estados ocupados.

Formando $b_{s_1} b_{s_2} \dots b_{s_N}$ mediante (1.4') se encuentra que

$$\Delta^*(r_1 r_2 \dots / s_1 s_2 \dots) = \Delta(s_1 s_2 \dots / r_1 r_2 \dots)$$

y, además, se demuestra (Apén. § 3) que estos coeficientes cumplen la propiedad (4)

$$\sum_{s_1 < s_2 \dots} \Delta^*(r_1 r_2 \dots r_p \dots r_N / s_1 s_2 \dots s_N) \, \Delta(r_1 r_2 \dots r_{p'} \dots r_N /$$
$$/ \, s_1 s_2 \dots s_N) = \delta_{pp'} . \qquad (6.3)$$

La probabilidad de la configuración de campo a la cual se refiere $E(s_1 s_2 \dots s_N)$ queda determinada por:

$$W(r_1 r_2 \dots r_N / s_1 s_2 \dots s_N) = \Delta^*(r_1 r_2 \dots r_N / s_1 s_2 \dots s_N) \, \Delta(r_1 r_2 \dots r_N /$$
$$/ s_1 s_2 \dots s_N) . \qquad (6.4)$$

(4) La propiedad de estos determinantes menores de un determinante ortogonal

$$\Sigma \, \Delta(r_1 r_2 \dots r_N / s_1 s_2 \dots s_N) \Delta(r_1 r_2 \dots / s_1 s_2 \dots s_N) = 1$$

como caso particular del nuestro, ha sido demostrado por N. TRUDI. Ver T. MUIR, *The theory of determinants un the historical order of development*, pág. 286, T. III (Mac Millan, 1920).

En el caso en que una sola partícula está presente en el campo, en el estado original r, la probabilidad de observarla en el estado t se reduce, como en el caso de estadística $B-E$ a $C_{rt}^* C_{rt}$. La (4.5) es, pues, válida para ambas estadísticas.

§ 7. - *Valores medios y fluctuaciones.* El valor medio del número de partículas observables en el estado t, dados originalmente los estados ocupados $r_1, r_2, \dots r_N$ está dado por:

$$\overline{m}(r_1 r_2 \dots r_N/t) = \sum_m m_t W(r_1 r_2 \dots r_N/s_1 s_2 \dots s_t \dots s_N)$$

donde es necesario tener een cuenta que m_t admite solamente los valores 0 o 1 y que la suma sobre m está extendida sobre todos los valores compatibles con $\Sigma m_t = N$, número total de partículas presentes en el campo.

Usando de la propiedad (6.3) se muestra que

$$\overline{m}(r_1 r_2 \dots r_N/t) = |C_{r_1 t}|^2 + |C_{r_2 t}|^2 + \dots + |C_{r_N t}|^2 = \sum_r n_r |C_{rt}|^2 \tag{7.2}$$

debiéndose notar que $n_r = 1$ para los estados correspondientes al sistema f_r ocupados, y $n_r = 0$ para los vacíos.

Teniendo en cuenta los valores posibles de m_t se ve en forma inmediata que:

$$\overline{m}^2(r_1 r_2 \dots/t) = \sum_m m_t^2 W(r_1 r_2 \dots r_N/ s_1 s_2 \dots s_t \dots s_N) = \overline{m}(r_1 r_2 \dots/s_1 s_2 \dots) \tag{7.3}$$

con los cual obtenemos para la dispersión la expresión:

$$\sigma^2(r_1 r_2 \dots/t) = \sum_r n_r |C_{rt}|^2 (1 - |C_{tr}|^2) - \sum_{r \neq r'} n_r n_{r'} |C_{rt}|^2 |C_{r't}|^2 \tag{7.4}$$

$$r, r' = r_1 r_2 \dots$$

o bien, según la (4.5),

$$\sigma^2(r_1 r_2 \dots/t) = \sum_r n_r P_{rt}(1 - P_{rt}) - \sum_{r \neq r'} n_r n_{r'} P_{rt} P_{r't}. \tag{7.4'}$$

En el caso en que todos los estados r están ocupados de (7. 2) y (7. 3) se sigue que $\overline{m}_t = 1, \sigma_t^2 = 0$. Las fluctuaciones correspondientes a cualquier estado t, como es de esperar, se anulan.

IV. - *Discusión*

Teniendo presente (5. 1') y (7. 2) podemos dar para el valor medio del número de partículas observables en el estado t, para campos de una u otra estadística la expresión

$$\overline{m}_t = \sum_r n_r P_{rt} \tag{IV. 1}$$

y según (5. 2') y (7. 4') para las fluctuaciones:

$$\sigma_t^2 = \sum_r n_r P_{rt}(1 - P_{rt}) \pm \sum_{r \neq r'} n_r n_{r'} P_{rt} P_{r't} \tag{IV. 2}$$

donde debe tenerse en cuenta que $n_r, n_{r'}$ toman para los campos de estadística F—D los valores 0 o 1, y que el signo + de σ_t^2 corresponde a la estadística B—E y el — a la de F—D.

Según hemos visto (final de §§ 4 y 6) P_{rt} define la probabilidad elemental del estado t respecto del estado r. Esto nos permite afirmar que el primer grupo de términos de σ_t^2 corresponde a fluctuaciones de partículas clásicas, según se muestra en el § 2.

El segundo grupo de términos de σ_t^2 debe ser atribuído a fluctuaciones provenientes de interferencias. En un instante dado, concurren al estado t partículas provenientes de distintos estados originales. En condiciones adecuadas, las ondas asociadas a estas partículas pueden interferir dando origen a las fluctuaciones mencionadas. Se ve que es así, pues en el caso que en el campo se hallen presente sólo n_r partículas en el estado original r, las fluctuaciones debidas a interferencias desaparecen, quedando solamente las correspondientes a partículas, como lo indican (5. 3) y (7. 4'), comparadas con (2. 3). En este caso, las fluctuaciones son las que corresponden a las del número de moléculas en subvolúmenes de un volumen de gas ideal.

Rutherford determinó experimentalmente las fluctuaciones de la desintegración α. Usando el método de los centelleos contaba el número de impactos de partículas α (estadística $B—E$) producidas dentro de un pequeño ángulo sólido, durante cierto intervalo de tiempo, dividido en subintervalos. Observando el número de centelleos en cada uno de estos subintervalos, se determina experimentalmente las fluctuaciones referidas a cada uno de éstos. Rutherford encontró que el valor así determinado, coincide, dentro de un error del 5 % con el dado por la (2. 3), siendo, en este caso, $\acute{n}_r$ el número de impactos observados. Desde nuestro punto de vista, las partículas α emitidas por los núcleos pueden ser descriptas mediante ondas esféricas, cada una de las cuales, en general, no contiene más de 1 partícula (n_r=1). Para que en las fluctuaciones del número de partículas dentro de un pequeño ángulo sólido (onda plana) los términos debidos a interferencias fueran significativos, es necesario que al mismo estado del sistema en el cual se realizan las observaciones (onda correspondiente al ángulo sólido elemental) concurran simultáneamente más de una partícula, lo que en el dispositivo de Rutherford es muy poco probable (5).

Por otra parte, como hemos visto (§ 5 (5. 4) en el caso de estadística $B—E$ las fluctuaciones de partículas desaparecen cuando el número de partículas presente en cada estado es suficientemente grande, quedando solamente las fluctuaciones debidas a interferencias, lo que es de esperar según el principio de correspondencia. Comparando la (5. 4) con (3.2') y (3. 2) se aprecia estas fluctuaciones corresponden a las determinadas clásicamente para un campo de ondas (6).

En el caso de estadística $F—D$ cuando todos los estados están ocupados las fluctuaciones desaparecen (final del § 7).

Finalmente, señalaremos la analogía existente entre los resultados obtenidos y las fluctuaciones a las cuales conducen las estadísticas cuánticas obtenidas por Einstein (estadística $B—E$) y por Pauli (estadística $F—D$) (7).

---

(5) Para los valores de las mediciones ver R. B. LINDSAY, *loc. cit.*, Cap. II, § 11.

(6) Un ejemplo concerniente a las fluctuaciones de fotones y la transición al límite clásico ha sido estudiado por D. CANALS FRAU, *Rev. de la Unión Mat. Argentina.* Vol. XIV, pág. 213, 1950.

(7) Ver p. e. art. de W. PAULI, *Handb. der Physik,* T. 24. 1 § 14, pág. 197, Berlín, 1933.

Se obtienen en estos casos,

$$\sigma_t^2 = \overline{m}_t \pm \frac{(\overline{m}_t)^2}{G_t}$$

siendo G_t el peso de la configuración a la cual se refiere $\overline{m}_t$ y correspondiendo el signo $+$ a la estadística $B—E$, y el $-$ a la de $F—D$. Por otra parte las fluctuaciones a las cuales conduce la ley de distribución de Boltzmann están dadas por:

$$\sigma_t^2 = \overline{m}_t.$$

Es conocido el hecho que, en caso de equilibrio termodinámico, las fluctuaciones debidas a interferencias están representadas por el término $\dfrac{(\overline{m}_t)^2}{G_t}$ con lo cual, la analogía cón (IV. 2) fluye en forma inmediata.

Deseo expresar, en forma especial, mi agradecimiento al Prof. G. Beck por las sugerencias y críticas concernientes a los temas tratados en este trabajo.

APENDICE

§ 1. - *Demostración de* (5. 1) y (5. 2). Teniendo en cuenta que z y Z son variables complejas los coeficientes de (4. 1) admiten la representación

$$\delta(n_1 n_2 \ldots / m_1 m_2 \ldots) = \frac{1}{(2\pi i)^N} \sqrt{\frac{m_1!\, m_2! \ldots}{n_1!\, n_2! \ldots}} \oint \ldots$$

$$\oint \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2} \ldots}{Z_1^{m_1+1} Z_2^{m_2+1} \ldots} \, dZ_1 \, dZ_2 \ldots \quad \text{(Ap. 1)}.$$

Además, teniendo en cuenta la (4. 2)

$$\delta^*(n_1 n_2 \ldots / m_1 m_2 \ldots) = \frac{1}{(2\pi i)^N} \sqrt{\frac{n_1!\, n_2! \ldots}{m_1!\, m_2! \ldots}} \oint \ldots$$

$$\oint \frac{Z_1^{m_1} Z_2^{m_2} \ldots}{z_1^{n_1} z_2^{n_2} \ldots} dz_1\, dz_2 \ldots \qquad \text{(Ap. 2)}$$

en donde las integraciones están tomadas sobre el círculo unidad con centro en el origen. Mediante esta representación, de (4. 1) se sigue inmediatamente

$$\sum_{m_1 m_2 \ldots} \delta^*(n_1 n_2 \ldots n'_r / m_1 m_2 \ldots)\, \delta(n_1 n_2 \ldots n'_r / m_1 m_2 \ldots) = \delta_{n_r n'_r} \qquad \text{(Ap. 3)}$$

Teniendo en cuenta la (Ap. 1):

$$m_t\, \delta(n_1 n_2 \ldots / m_1 m_2 \ldots m_t \ldots) = -\frac{1}{(2\pi i)^N} \sqrt{\frac{m_1!\, m_2! \ldots}{n_1!\, n_2! \ldots}} \oint \ldots$$

$$\oint \frac{d}{dZ_t}\left(\frac{1}{Z_t^{m_t}}\right) \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2} \ldots}{Z_1^{m_1+1} \ldots Z_{t-1}^{m_{t-1}+1} Z_{t+1}^{m_{t+1}+1} \ldots} dZ_1\, dZ_2 \ldots$$

Integrando por partes, considerando que el integrando es una función uniforme y teniendo presente la (1. 4)

$$m_t\, \delta(n_1 n_2 \ldots / m_1 m_2 \ldots m_t \ldots) =$$

$$= \sum_r n_r C_{rt}^* C_{rt}\, \delta(n_1 n_2 \ldots n_r \ldots n_{r'} \ldots / m_1 m_2 \ldots) +$$

$$\sum_r n_r C_{rt}^* \sum_{r' \neq r} C_{r't}\, \delta(n_1 n_2 \ldots n_r - 1 \ldots n_{r'} + 1 / m_1 m_2 \ldots). \qquad \text{(Ap. 4)}$$

Multiplicando por $\delta(n_1 n_2 \ldots n_r \ldots n_s \ldots / m_1 m_2 \ldots)$ sumando sobre m y teniendo presente la (Ap. 3) se obtiene para el valor medio la expresión (5. 1).

Tenemos, por otra parte, que calcular:

$$m_t^2\, \delta(n_1\, n_2 \ldots / m_1\, m_2 \ldots m_t \ldots).$$

Repitiendo el desarrollo mediante el cual se ha obtenido (Ap. 4) llegamos:

$$m_t^2\, \delta(n_1\, n_2 \ldots / m_1\, m_2 \ldots m_t \ldots) =$$
$$\sum_r (n_r\, C_{rt}^*\, C_{rt})^2\, \delta(n_1\, n_2 \ldots n_r \ldots n_{r'} \ldots / m_1\, m_2 \ldots) +$$
$$+ \sum_r n_r\, C_{rt}^*\, C_{r'} \sum_{r \neq r'} (n_r + 1)\, C_{r't}^*\, C_{r't}\, \delta(n_1\, n_2 \ldots n_r \ldots n_{r'} \ldots / m_1\, m_2 \ldots) +$$

términos en $\delta(n_1\, n_2 \ldots n_r - 2 \ldots n_{r'} + 2 / m_1\, m_2 \ldots)$.

Multiplicando por $\delta(n_1\, n_2 \ldots n_r \ldots n_{r'} \ldots / m_1\, m_2 \ldots)$ y sumando sobre m se obtiene

$$\sigma^2(n_1\, n_2 \ldots / t) = \sum_r n_r\, C_{rt}^*\, C_{rt} \sum_{r \neq r'} (n_{r'} + 1)\, C_{r't}^*\, C_{r't}.$$

Finalmente teniendo en cuenta que

$$\sum_{r \neq r'} C_{r't}^*\, C_{r't} = 1 - C_{rt}^*\, C_{rt}.$$

se llega a la (5.2).

§ 2. - *Demostración de* (6.1). En el caso de estadística Fermi-Dirac los operadores de amplitud cumplen las reglas de conmutación

$$a_r\, a_{r'}^+ + a_{r'}^+\, a_r = \delta_{r'r}$$
$$a_r\, a_{r'} + a_{r'}\, a_r = a_r^+\, a_{r'}^+ + a_{r'}^+\, a_r^+ = 0 \quad r \neq r'$$
$$a_r\, a_r = a_r^+\, a_r^+ = 0. \qquad \text{(Ap. 5)}$$

Estas reglas son satisfechas, como es sabido, representando estos operadores mediantes variables $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ que cumplen las reglas de conmutación de los operadores de espín de Pauli:

$$a_r = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\,\sigma_2)_r$$

$$a_r^+ = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\,\sigma_2)_r$$

$$a_r^+ a_r = \frac{1}{2}(1 + \sigma_3)_r.$$

Este último es el operador de número N_r de partículas asociadas al estado r y cuyos autovalores son 0 y 1. Introduciendo los espinores de Pauli ξ_r, η_r que describen los estados ocupados y vacíos, respectivamente

$$\begin{aligned} a_r^+ a_r \,\xi_r &= \xi_r \\ a_r^+ a_r \,\eta_r &= 0\,\eta_r \end{aligned} \qquad \text{(Ap. 6)}$$

se encuentra:

$$\begin{aligned} a_r\,\xi_r &= \eta_r & \qquad a_r^+\,\xi_r &= 0 \\ a_r^+\,\eta_r &= \xi_r & \qquad a_r\,\eta_r &= 0. \end{aligned} \qquad \text{(Ap. 7)}$$

Las autofunciones del hamiltoniano $\psi_{r_1}(q_1)\,\psi_{r_2}(q_2)\ldots$ donde $q_1\,q_2\ldots$ son las coordenadas de partículas, corresponden a la representación (q/W).

Efectuamos las transformaciones:

$$\begin{aligned} (N/W) &= (N/q)\,(q/W) \\ (a/W) &= (a/N)\,(N/W) \end{aligned} \qquad \text{(Ap. 8)}$$

De (Ap. 6) se sigue que (N_r/W_r) admite solamente los dos valores $(N_r/W_r) = \begin{cases} \xi_r \\ \eta_r. \end{cases}$

Además (a_r/N_r) dado que los autovalores de N son 0 y 1 admite igualmente los dos valores $(a_r/N_r) = \begin{cases} (a_r/1) \\ (a_r/0). \end{cases}$

La segunda ecuación (Ap. 8) es, por consiguiente, considerando por ahora una sola partícula presente en el campo en el estado r:

$$(a_r/N_r) = (a_r/1)\ \xi_r + (a_r/0)\ \eta_r.$$

Teniendo presente las (Ap. 7):

$$(a_r/N_r) = (a_r/1)\ a_r^+ \eta_r + (a_r/0)\ a_r \xi_r$$

Igualmente término a término con la enterior resulta

$$(a_r/1) = (a_r/0)\ a_r$$
$$(a_r/0) = (a_r/1)\ a_r^+$$

y, finalmente, teniendo en cuenta las reglas de conmutación obtenemos

$$(a_r/1) = a_r \qquad (a_r/0) = a_r^+. \qquad \text{(Ap. 9)}$$

En la representación (a/N) los estados ocupados y vacíos están descriptos por las variables a_r y a_r^+, respectivamente. Las reglas de conmutación, aparecen desde este punto de vista como las relaciones de ortogonalidad de estas funciones.

Se encuentra en forma inmediata, teniendo en cuenta que $(q/W) = \psi_{r_1}(q_1)\ \psi_{r_2}(q_2) \ldots$ en el caso general de varios estados ocupados ([8]):

$$(a/N) = a_{r_1} a_{r_2} \ldots a_{r_N}.$$

§ 3. - *Demostración de* (6. 3) y (7. 2). Los coeficientes de (6. 2) admiten la representación

$$\Delta(r_1 r_2 \ldots r_N / s_1 s_2 \ldots s_N) = \frac{\partial^N (a_{r_1} a_{r_2} \ldots a_{r_N})}{\partial b_{s_N} \partial b_{s_{N-1}} \ldots \partial b_{s_2} \partial b_{s_1}} \qquad \text{(Ap. 10)}$$

([8]) Esta representación de las funciones de onda, así como la dada en el § 64 ha sido empleada por H. W. Peng, Proc. Roy Ir. Ac. vol. 51, pág. 113, 1947.

$$\Delta^*(r_1 r_2 \ldots r_N / s_1 s_2 \ldots s_N) = \frac{\partial^N (b_{s_1} b_{s_2} \ldots b_{s_N})}{\partial a_{r_N} \partial a_{r_{N-1}} \ldots \partial a_{r_2} \partial a_{r_1}}$$

donde debe tenerse en cuenta el orden de las derivaciones debido al carácter no conmutativo de las variables. Teniendo en cuenta la dependencia lineal entre las variables a_r y b_s y el carácter anticonmutativo de las variables a y de las variables b se demuestra sin dificultad

$$\frac{\partial^N (a_{r_1} a_{r_2} \ldots a_{r_t} \ldots a_{r_N})}{\partial a_{r_N} \partial a_{r_{N-1}} \ldots \partial a_{r'_t} \ldots \partial a_{r_1}} = \delta_{r_t r'_t} =$$

$$= \sum_s \frac{\partial^N (a_{r_1} \ldots a_{r_t} \ldots a_{r_N})}{\partial b_{s_N} \partial b_{s_{N-1}} \ldots \partial b_{s_1}} \cdot \frac{\partial^N (b_{s_1} b_{s_2} \ldots b_{s_N})}{\partial a_{r_N} \ldots \partial a_{r'_t} \ldots \partial a_{r_1}} .$$

de donde, en forma inmediata, teniendo en cuenta (Ap. 10) se sigue la (6. 3).

Mediante la representación (Ap. 10) de los coeficientes de (6. 2) operando de manera similar a la del primer parágrafo de este apéndice se logra la (7. 2).