# NOTAS SOBRE LAS DISTRIBUCIONES DE POISSON

por A. Blanc-Lapierre

Las *distribuciones de Poisson* son muy conocidas. Bastará, pues, recordar rápidamente una de las definiciones posibles. Se trata de una distribución aleatoria de puntos sobre el eje de las $t$ $[-\alpha < t < +\alpha]$. Se parte de una función cierta $\rho(t)$ que será la *densidad* de la distribución. Se supone que se verifican las condiciones siguientes:

$\alpha$) la probabilidad de que *un punto* de la distribución caiga entre $t$ y $t+\Delta t$ es un infinitamente pequeño equivalente a $\rho\Delta t$;

$\beta$) la probabilidad de que *más de un punto* de la distribución caiga entre $t$ y $t+\Delta t$ es un infinitamente pequeño de orden superior;

$\gamma$) si $\Delta t_1$, $\Delta t_2$, ... son intervalos disjuntos, los números de puntos $N_1, N_2, \ldots$ que caigan respectivamente en $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots$ son variables aleatorias independientes.

Se puede mostrar que si estas hipótesis se verifican, entonces el número $N$ de puntos de la distribución que caen en un intervalo $\Delta t$ es una variable aleatoria que satisface a la *ley de Poisson*, es decir, que la probabilidad de que $N$ tome un valor $m$ (entero) es

$$P(m) = \frac{(\alpha)^m e^{-\alpha}}{m!} \tag{1}$$

con

$$\alpha = \int_{t_1}^{t_2} \rho(\vartheta)\, d\vartheta. \tag{2}$$

Un caso particular muy importante es el que corresponde a $\rho(\vartheta) = \rho_0 =$ constante (distribución uniforme).

En general, cuando se trata de distribuciones de Poisson, se presta sobre todo atención al número de puntos que caen en un intervalo, dejando de lado el estudio de las propiedades estadísticas de las magnitudes de los intervalos que separan dos puntos sucesivos consecutivos. A pesar de eso, parece que la consideración de estos intervalos puede conducir a demostraciones muy sencillas (*).

I. *Teorema directo.* — *Si se sabe que el principio de un intervalo está en* $t_1$, *entonces la probabilidad condicional de que la extremidad de este intervalo caiga entre* $t_2$ *y* $t_2 + dt_2$ *es*

$$f(t_1, t_2)\, dt_2$$

*con*

$$f(t_1, t_2) = e^{-\int_{t_1}^{t_2} \rho(\vartheta) d\vartheta}\, \rho(t_2). \tag{3}$$

La demostración es inmediata; la probabilidad buscada es la probabilidad de realización simultánea de los dos sucesos independientes siguientes:

1º. No existe ningún punto entre $t_1$ y $t_2$;

2º. Existe, por lo menos, un punto entre $t_2$ y $t_2 + dt_2$.

Más interesante es el teorema recíproco, puesto que da un método de introducción de las distribuciones de Poisson.

II. *Teorema recíproco.* — Sea una función $f(t_1, t_2)$ que supondremos acotada y de derivadas continuas en la región $t_2 \geqq t_1$. Vamos a construír una distribución de puntos sobre la parte positiva del eje de las $t$.

$l_1$ es una variable aleatoria de densidad de probabilidad $f[o, l_1]$;

$l_2$ es una variable aleatoria cuya densidad de probabilidad condicional, *cuando el valor* $l_1$ *es conocido*, es $f[l_1, l_2]$;

$l_3$ es una variable aleatoria cuya densidad de probabilidad condicional, *cuando se conocen el valor de* $l_1$ *y el valor de* $l_2$, es $f[l_1 + l_2, l_3]$, ..., etc.

Estas definiciones suministran un mecanismo de pruebas sucesivas que permite definir la sucesión $l_1, l_2, l_3, \ldots$ A esta sucesión asociemos la distribución de los puntos de abscisas $t_0$, $t_1$, $t_2, \ldots$ iguales a

(*) La idea de la demostración del teorema recíproco que sigue me vino después de interesantes conversaciones mantenidas con el Doctor S. Selzer.

$$t_0 = 0$$
$$t_1 = l_1$$
$$t_2 = l_1 + l_2$$
$$t_3 = l_1 + l_2 + l_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n = l_1 + l_2 + l_3 + \ldots l_n.$$

*Teorema.* — *Sea* $\vartheta$ *un número arbitrario positivo. Si, en la distribución precedente hay independencia estadística entre el campo* $t > \vartheta$ *y el campo* $0 \leqq t \leqq \vartheta$, *entonces esta distribución es una distribución de Poisson.*

Para demostrarlo vamos a probar que la función $f$ tiene, bajo la condición impuesta, la forma (3).

1°. *La probabilidad de que exista por lo menos un punto* entre $\vartheta$ y $\vartheta + \Delta\vartheta$ es un infinitamente pequeño equivalente a $f(\vartheta, \vartheta)\,\Delta\vartheta$. En efecto, usando la propiedad de independencia, esta probabilidad puede calcularse suponiendo que existe un punto en $\vartheta$.

2°. *Calculemos de dos maneras la probabilidad de que el primer punto de la distribución, de abscisa superior a* $x$, *caiga entre* $y$ *e* $y + \Delta y$ $[y > x]$.

$\alpha$) En virtud de la admitida independencia se puede suponer que existe un punto en $x$ sin modificar las probabilidades relativas a acontecimientos futuros con respecto a $x$: entonces la probabilidad buscada es

$$f[x, y]\,\Delta y.$$

$\beta$) Las posibilidades pueden clasificarse en categorías disjuntas de la manera siguiente. Sea $\vartheta$ la abscisa del punto de la distribución de abscisa inmediatamente inferior a $y$ (este punto siempre existe, puesto que $t_0 = 0$ es un punto de la distribución). Si $\Delta t_1$ y $\Delta t_2$ son dos intervalos disjuntos, $\vartheta$ no puede pertenecer simultáneamente a ambos y, por eso, la clasificación de las pruebas según el valor de $\vartheta$ conduce a una clasificación en categorías disjuntas. Por otra parte, decir que $\vartheta$ pertenece a un intervalo $\vartheta_0$, $\vartheta_0 + d\vartheta$, es decir

1°. que, por lo menos, hay un punto en este intervalo (la probabilidad de esto es $f[\vartheta_0, o_0]\,d\vartheta$);

2º. Que el intervalo que principia entre $\vartheta_0$ y $\vartheta_0 + d\vartheta$ tiene su extremidad entre $y$ e $y + dy$, (probabilidad $f[\vartheta_0, y]\,\Delta y$). No se debe olvidar el caso $\vartheta = t_0 = 0$, que tiene una probabilidad $f[0, y]\,\Delta y$. Sumando todas las posibilidades se halla una probabilidad igual a

$$\Delta y_0 \int_0^x f[\vartheta, y]\, f(\vartheta, \vartheta)\, d\vartheta + f(0, y).$$

Igualando las dos expresiones de la misma probabilidad resulta:

$$f[x, y] = \int_0^x f[\vartheta, y]\, f(\vartheta, \vartheta)\, d\vartheta + f(0, y). \tag{4}$$

Esta expresión es una identidad en $x$ $[x \leqq y]$.

Derivando con respecto a $x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f(x, x)\, f(x, y). \tag{5}$$

Se ve que la solución de esta ecuación depende de una función $\rho$ arbitraria de una variable y se escribe

$$f(x, y) = \rho(y)\, e^{-\int_x^y \rho(u) du}. \tag{6}$$

Esta expresión es la misma que (3), con lo cual queda demostrado el teorema.