SOBRE EL PROBLEMA DE LA CONVERGENCIA EN LA TEORIA DE LA TRANSFORMACION DE LAPLACE

por G. DOETSCH

1. Una función $\varphi(z)$ analítica en un círculo de centro cero puede desarrollarse en la serie de potencias:

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

y ésta es convergente en el círculo máximo que no contiene ninguna singularidad de la función. Efectuando la transformación $z=e^{-s}$, que transforma un círculo del plano z en un semiplano de la derecha del plano s, obtenemos una serie de Dirichlet

$$\varphi(e^{-s})=\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ns},$$

y reemplazando el índice de sumación n por una variable continua t llegamos a la transformación de Laplace

$$f(s)=\int_0^{\infty} e^{-st} F(t)\, dt = \mathfrak{L}\{F\}.$$

Análogamente a dicha propiedad de la serie se podría suponer 1) que cada función $f(s)$ analítica en un semiplano pudiera representarse por una integral de Laplace y 2) que ésta sea convergente en el semiplano máximo que no contiene ninguna singularidad de $f(s)$. Pero es sabido que estas dos suposiciones son falsas. Por eso en la teoría de la transformación de Laplace se plantean dos problemas: 1) ¿Cuáles funciones analíticas en un semiplano pueden representarse por una integral de Laplace? Este es el «problema de representación», de que no hablaré. 2) Si una integral de Laplace es convergente en cierto semiplano p, que tal vez no es el campo completo de convergencia, ¿en cuáles condiciones con respecto a la función analítica $f(s)$ representada por la integral puede afirmarse que la integral sea convergente en un semiplano más extenso? Este es el «problema de la convergencia», de que trataré en lo que sigue.

2. Cuando se pregunta si la integral de Laplace es convergente en un punto s_0, es preciso estudiar el comportamiento de la integral parcial

$$\int_0^t e^{-s_0\tau} F(\tau)\, d\tau$$

para $t \longrightarrow \infty$; y si la convergencia de esta integral parcial debe depender de las propiedades, no de la función $F(t)$, sino de la función $f(s)$, es preciso expresar la integral parcial mediante la función $f(s)$. Este es el problema.

3. Para atacarlo, recordamos el hecho que la integral parcial en el caso $s_0=0$, es decir $\int_0^t F(\tau)\, d\tau$, puede expresarse mediante una integral compleja de la función $f(s)$:

$$\int_0^t F(\tau)\, d\tau = V.P. \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts} \frac{f(s)}{s}\, ds.$$

Esta es la «forma integrada» (1) de la conocida «fórmula compleja de inversión» de la transformación de Laplace, y vale, contrariamente a esta fórmula de inversión, sin restricción ninguna con respecto a la función $F(t)$, pero con una restricción importante con respecto a la abscisa x, a saber, que x no sólo debe estar situada en el semiplano p, donde la integral de Laplace se supone convergente, sino que x debe además ser mayor que cero; $x>0$. Por eso, si se reemplaza $F(t)$ por $e^{-s_0 t}F(t)$, para llegar a $\int_0^t e^{-s\tau} F(\tau)\, d\tau$, y análogamente $f(s)$ por $f(s+s_0)$:

$$(1) \quad \int_0^t e^{-s_0\tau} F(\tau)\, d\tau = V.P. \frac{1}{2\pi i} \int e^{ts} \frac{f(s+s_0)}{s}\, ds =$$

$$= V.P. \frac{1}{2\pi i} \int e^{t(s-s_0)} \frac{f(s)}{s-s_0}\, ds,$$

(1) G. Doetsch, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*. Berlin 1937, Verlag Julius Springer, p. 107.

la abscisa de la recta de integración debe ser mayor que $\mathcal{R} s_0$. En esta fórmula el punto s_0 puede ser cualquier punto del plano complejo, de acuerdo con el hecho que la integral parcial en el primer miembro existe para todo s_0.

4. Pero dicha fórmula no basta para nuestros fines, pues la integral depende de los valores de $f(s)$ en el semiplano p, donde la convergencia de la integral de Laplace es conocida, mientras que es necesario introducir los valores de $f(s)$ en un semiplano más extenso, donde $f(s)$ es analítica y cumple ciertas condiciones. Por eso consideramos un rectángulo formado de dos rectas verticales de abscisas x y x_1 y dos rectas horizontales de ordenadas $\pm\omega$. Admitamos que x_1 esté situada en el semiplano p, donde la convergencia de $\mathfrak{L}\{F\}$ está garantizada, y x en un semiplano p_1 más extenso, donde $f(s)$ es función analítica, y sea s_0 un punto del rectángulo $(x < \mathcal{R} s_0 < x_1)$. Entonces la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int e^{t(s-s_0)} \frac{f(s)}{s-s_0} ds,$$

extendida a la perifería del rectángulo en sentido positivo, es igual al residuo de la función $e^{t(s-s_0)} f(s)/(s-s_0)$ en el único punto singular s_0, es decir igual a $f(s_0)$. Según la fórmula (1) la integral sobre la recta de abscisa x_1 converge a $\int\limits_0^t e^{-s_0\tau} F(\tau)\, d\tau$ para $\omega \to \infty$. Si suponemos que, para $\mathcal{J} s = y \to \pm\infty$ el módulo $|f(s)|$ crece más lentamente que $|y|$, es decir (²)

(2) $\qquad f(s) = \vartheta(|y|)$, uniformemente con respecto a x en p_1,

las integrales sobre los segmentos horizontales se anulan para $\omega \to \infty$, porque el intervalo de integración tiene longitud constante, $e^{t(s-s_0)}$ está acotado y $f(s)/(s-s_0) \to 0$. Por eso la integral sobre la recta de abscisa x tiene igualmente límite. Cambiando el sentido de integración y llevando la integral al otro miembro de la ecuación obtenemos:

$$(3) \quad \int\limits_0^t e^{-s_0\tau} F(\tau)\, d\tau = f(s_0) + V.P. \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{t(s-s_0)} \frac{f(s)}{s-s_0} ds, \quad \mathcal{R} s_0 > x.$$

(²) Es sabido que esta propiedad se cumple en todo semiplano interior al campo exacto de convergencia de $\mathfrak{L}\{F\}$, véase 1. c. (1), p. 52. Luego es condición *necesaria* para que $\mathfrak{L}\{F\}$ converja en puntos de p_1.

5. Antes de proseguir hagamos una observación importante. Haciendo $t=0$, el primer miembro se anula y queda:

$$f(s_0)=V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}\frac{f(s)}{s_0-s}\,ds, \tag{4}$$

es decir: la prolongación analítica de una transformada de Laplace se expresa por la integral de Cauchy con una recta vertical como camino de integración, en todo el semiplano p_1, donde $f(s)$ cumple la condición (2).

Reemplazando $f(s_0)$ en (3) por el valor (4), se obtiene la fórmula:

$$\int_0^t e^{-s_0\tau}F(\tau)\,d\tau=V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}\frac{e^{t(s-s_0)}-1}{s-s_0}f(s)\,ds.$$

Como la fracción $(e^{t(s-s_0)}-1)/(s-s_0)$ es holomorfa incluso en el punto s_0, se puede demostrar que esta fórmula vale también cuando el camino de integración queda a la derecha de s_0 o atraviesa s_0, no saliendo del semiplano p_1.

6. Mediante la fórmula (3) se resuelve ahora el problema de la convergencia para el semiplano p_1: La condición necesaria y suficiente, con respecto a la función $f(s)$, para que la integral de Laplace sea convergente en un punto s_0 de este semiplano, es la siguiente: Hay un valor $x<\mathcal{R}s_0$ en p_1, que tiene la propiedad:

$$\lim_{t\to\infty}V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}e^{t(s-s_0)}\frac{f(s)}{s-s_0}\,ds=0.$$

Observemos que en la integral $\mathcal{R}(s-s_0)$ es negativo, luego $e^{t(s-s_0)}\longrightarrow 0$ para $t\longrightarrow\infty$. Si p. e.

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}\frac{|f(s)\,ds|}{|s|+1}$$

es convergente, se ve fácilmente que la condición se cumple.

(3) G. DOETSCH, *Handbuch der Laplace-Transformation.* I. BAND, *Theorie der Laplace-Transformation.* Basel 1950, Verlag Birkhäuser (5. Kapitel).

7. Como fin de estas consideraciones quisiera mencionar que la fórmula (3), aplicada a las series de Dirichlet, conduce a una nueva expresión para las sumas parciales de estas series, permitiendo atacar el problema de la convergencia de las series de Dirichlet. Más detalles se encontrarán en un nuevo libro mío [3], que está por aparecer.

Universidad Nacional del Litoral. - Santa Fe.

BIBLIOGRAFIA

Libros y revistas

Matemática, Técnica e Ciencia. (Praia de Botafogo 244, A, 1º andar, Río de Janeiro).

Esta nueva revista científica y didáctica se edita en Brasil. Como su título lo anuncia abarca diferentes orientaciones del conocimiento humano puestas al alcance del estudiante. El primer número contiene, entre otras cosas, un *Método para resolver la ecuación* $a x^2 + b x + c = 0$; *Cuestiones propuestas en exámenes de ingreso; Cálculo de correas para trasmisión de movimientos,* etc.

JACOB STEINER, *Construcciones geométricas realizadas con la regla.*

Scripta Mathematica acaba de publicar, traducidas de la primera edición alemana (1833) por M. E. Stark y con introducción y notas de R. C. Archibald, *Jacob Steiner's Geometrical Constructions with a ruler given a fixed circle with its center* (Yeshiva College, New York N. Y., 1950). Contiene *algunas propiedades de figuras rectilíneas, algunas propiedades del círculo, solución de todos los problemas geométricos mediante la regla, etc.*

DAVID EUGENE SMITH, *Portraits of Eminent Mathematicians.*

En 1946, *Scripta Mathematica,* Yeshiva College, publicó, con síntesis biográfica de Smith, una hermosa colección de retratos de matemáticos eminentes: Arquímedes, Copérnico, Viète, Galileo, Napier, Descartes, Newton, Leibniz, Lagrange, Gauss, Lobachevsky y Sylvester.

Handbook of the Japanese Societies of Natural Science and Cultural Science.

Se trata de una publicación del Ministerio de Educación del Japón, del año 1949. Son diez volúmenes impresos a mimeógrafo que abarcan referencias sobre entidades dedicadas a la ciencia pura, la agricultura, la ingeniería, la literatura, la historia, el derecho y la economía. A través de esta minuciosa enumeración de sociedades científicas y culturales del Japón se aprecia el importante desarrollo espiritual alcanzado por dicho país.

M. Valentinuzzi