# SOLUCIONES SINGULARES DE LA ECUACION POTENCIAL EN EL CASO DE LOS PROBLEMAS DE DIRICHLET Y NEUMANN EN EL PRIMER CUADRANTE

por Dietrich Voelker
Buenos Aires

La ecuación potencial en dos variables es

$$\Delta F(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Para el primer cuadrante como dominio de integración, los valores de contornos de $F(x, y)$ y de las primeras derivadas sean los siguientes

$$A(x) = \lim_{y \to 0} F(x, y)$$

$$B(y) = \lim_{x \to 0} F(x, y)$$

$$A_1(x) = \lim_{y \to 0} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$$

$$B_1(y) = \lim_{x \to 0} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$$

La ecuación (1) se transforma por intermedio de la transformación de Laplace de dos variables (1) en la ecuación algebráica

$$[u^2 f(u, v) - u\, b(v) - b_1(v)] + [v^2 f(u, v) - v\, a(u) - a_1(u)] = 0,$$

donde las letras pequeñas significan, como siempre, las transformadas de las funciones con letras grandes, siendo $u$ y $v$ las variables correspondientes a $x$ e $y$.

(1) Las reglas de cálculo para la transformación de Laplace de una y dos variables sean consideradas como conocidas.

Como solución transformada resulta

$$f(u, v) = \frac{ub(v) + b_1(v) + va(u) + a_1(u)}{u^2 + v^2}. \tag{2}$$

*1. Soluciones singulares del problema de Dirichlet.*

Para obtener soluciones singulares del problema de Dirichlet hay que cumplir la condición que los límites de la solución en el contorno se anulan:

$$A(x) \equiv B(y) \equiv 0$$

es decir

$$a(u) \equiv b(v) \equiv 0.$$

Así la solución (1) se reduce a

$$f(u, v) = \frac{a_1(u) + b_1(v)}{u^2 + v^2}. \tag{3}$$

Para que esta sea una transformada, debe ser regular en $u$ y $v$ en dos «semiplanos derechos» de $u$ y $v$ respectivamente, que no es el caso anulándose los dos factores del denominador $(u + iv)$ y $(u - iv)$ para valores arbitrariamente grandes de $Ru$ y $Rv$. Para obtener la solución (3) en una forma regular (con dos semiplanos derechos en $u$ y $v$) renunciamos a la independencia de las funciones $a_1$ y $b_1$, haciendo desaparecer el numerador para $u^2 = - v^2$.

Pongamos

$$a_1(u) = \alpha_1(u^2)$$
$$b_1(v) = \beta_1(v^2)$$

y $$\alpha_1(- v^2) + \beta_1(v^2) = 0$$

o $$\beta_1(v^2) = - \alpha_1(- v^2).$$

Con esto resulta de la solución (3) como solución singular del problema de Dirichlet en forma todavía transformada

$$f(u, v) = \frac{\alpha_1(u^2) - \alpha_1(-v^2)}{u^2 - (-v^2)} \tag{4}$$

siendo $\alpha_1$ una función cualquiera, con la cual la función $f(u,v)$ resulta ser función del tipo transformado.

Ejemplo 1.

$$\text{Si } \alpha_1(z) \equiv \frac{1}{z^n} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

se tiene $f(u,v)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{1}{u^{2n-2k}}\,\frac{1}{v^{2k+2}}$

y antitransformando

$$F(x,y)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^{2n-2k-1}}{(2n-2k-1)!}\,\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.$$

De esta solución de la ecuación potencial que desaparece en los contornos del primer cuadrante, son los primeros tres polinomios

$$n=1 \qquad F(x,y)=xy$$

$$n=2 \qquad F(x,y)=\frac{xy}{6}(x^2-y^2)$$

$$n=3 \qquad F(x,y)=\frac{xy}{12}\left(\frac{x^4}{10}-\frac{x^2y^2}{3}+\frac{y^4}{10}\right)\,.$$

Ejemplo 2.

Poniendo $\alpha_1(z)\equiv\frac{1}{z+1}$

se tiene $f(u,v)=\frac{1}{u^2+1}\,\frac{1}{v^2-1}$

y $F(x,y)=\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y.$

Ejemplo 3.

$$\alpha_1(z)\equiv\frac{1}{z^4+4}$$

$$f(u,v)=\frac{1}{u^4+4}\,\frac{v^2}{v^4+4}-\frac{u^2}{u^2+4}\,\frac{1}{v^4+4}$$

$$F(x,y)=\frac{1}{4}\left[\operatorname{sen} x \cosh x \cos y \operatorname{senh} y-\cos x \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y \cosh y\right].$$

Es posible hallar la antitransformada de (3) en general, si la escribimos en la forma

$$f(u, v) = \frac{1}{u+iv} \frac{a_1(u) - a_1(iv)}{u - iv} \ (^2)$$

y suponemos que la función $a$ sea par. Entonces resulta por aplicación formal de unas reglas de cálculo de la transformación de Laplace como solución antitransformada

$$F(x, y) = \frac{i}{2} \int_{x-\frac{y}{i}}^{x+\frac{y}{i}} A_1(z)\, dz, \qquad (5)$$

donde $A_1$ es la antitransformada de $a_1$ y una función impar. Como prueba es posible legitimar cada paso de la deducción, pero más sencillo es averiguar, que esta solución cumple la ecuación potencial (1) y tiene como valores contornos en los semiejes positivos el valor cero. Tal averiguación directa tiene además la ventaja que no es más necesario que la función (analítica en el primer cuadrante) $A_1$ tenga una transformada de Laplace. Por ejemplo: $A_1$ puede ahora crecer en el infinito arbitrariamente rápido.

Advertencia: La expresión (5) representa un conjunto de soluciones singulares del problema de Dirichlet, pero no es seguro si no haya otras.

### 2. *Soluciones singulares del problema de Neumann.*

Las soluciones singulares del problema de Neumann, son las soluciones cuya derivada es cero en el contorno, tomada la derivada en el sentido normal al contorno, y entendida como el límite allí.

Para obtener tales soluciones hay que poner en (2) las transformadas de las derivadas igual a cero:

$$a_1(u) \equiv b_1(v) \equiv 0.$$

---

(²) por poner $b_1(v) = -a_1(iv)$, por lo cual renunciamos a la libre elegibilidad de la derivada de contorno $B_1(y)$.

Así queda como solución

$$f(u,v)=\frac{va(u)+ub(v)}{u^2+v^2} \tag{6}$$

Para la antitransformación tenemos que determinar las funciones $a$ y $b$ de tal manera que resulta una función del tipo transformada, o sea al menos regular en $u$ y $v$ en dos semiplanos derechos y anulándose para $Ru, v \rightarrow \infty$.

Ejemplo 1.

$$a(u)\equiv\frac{1}{u} \qquad b(v)\equiv\frac{1}{v}$$

$$f(u,v)=\frac{1}{uv}$$

$$F(x,y)=1.$$

Ejemplo 2.

$$a(u)\equiv\frac{1}{u(u^2+1)} \qquad b(v)\equiv\frac{-1}{v(v^2-1)}$$

$$f(u,v)=\frac{1}{uv}-\frac{u}{u^2+1}\,\frac{v}{v^2-1}$$

$$F(x,y)=1-\cos x\cosh y.$$

Ejemplo 3.

$$a(u)\equiv\frac{1}{u^{2n-1}} \qquad b(v)\equiv-\frac{(-1)^n}{v^{2n-1}} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

$$f(u,v)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{u^{2n-1-2k}}\,\frac{1}{v^{2k+1}}$$

$$F(x,y)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{2n-2-2k}}{(2n-2-2k)!}\,\frac{y^{2k}}{(2k)!}$$

siendo los cuatro primeros polinomios

$$n=1 \qquad F(x,y)=1$$

$$n=2 \qquad F(x,y)=\frac{x^2}{2!}-\frac{y^2}{2!}$$

$$n=3 \qquad F(x,y)=\frac{x^4}{4!}-\frac{x^2}{2!}\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}$$

$$n=4 \qquad F(x,y)=\frac{x^6}{6!}-\frac{x^4}{4!}\frac{y^2}{2!}+\frac{x^2}{2!}\frac{y^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}$$

Para la antitransformación general de (6) pongamos

$$b(v)=-\frac{1}{i}\,a(iv)=\frac{1}{i}\,a(-iv)$$

(por lo cual la función $a$ debe ser impar) y tenemos como solución transformada

$$f(u,v)=\frac{1}{i}\;\frac{1}{u+iv}\;\frac{iv\,a(u)-u\,a(iv)}{u-iv},$$

de donde viene por las reglas de la antitransformación formal

$$F(x,y)=+\frac{1}{2}\left[A\left(x+\frac{y}{i}\right)+A\left(x-\frac{y}{i}\right)\right] \qquad (7)$$

donde la función $A$ es par.

Como en el problema de Dirichlet, se averigua directamente que (7) cumple el problema de valores contornos de Neumann, con la especialidad que dichos valores son cero.

La función A debe ser analítica en el primer y cuarto cuadrante.

Además valen las mismas advertencias como en el caso del problema de Dirichlet.

Buenos Aires, 30/6/1950.