# TEORIA DE LOS SERVOMECANISMOS LINEALES DE ALTA PRECISION (*)

por Kurt Fränz

Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires - Instituto Radiotécnico

(Recibido el 11 Oct. 1950)

Un servomecanismo es un dispositivo automático que sirve por ejemplo, para mantener el rumbo de una nave en una dirección determinada por un giróscopo o para mantener una antena directiva de recepción, en la dirección de incidencia de una onda emitida por un avión, o en forma más abstracta, es un dispositivo que sirve para mantener la coincidencia aproximada de una magnitud o coordenada controlada, con otra coordenada de comparación. Durante los últimos años el progreso técnico en este campo ha dado lugar al desarrollo de una teoría de carácter muy general, la cual se puede aplicar a un sinnúmero de problemas prácticos. La publicación fundamental norteamericana parece ser el libro de *Norbert Wiener* «The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications» [1]. Existen varios ensayos más breves destinados a facilitar la comprensión del tema por los ingenieros [2,3].

Nos planteamos el problema de desarrollar una teoría más especializada y aplicable a los servomecanismos lineales de alta precisión que sirven para el control de magnitudes continuas, por ej., las coordenadas de un avión. Es natural que con tal especialización obtendremos resultados más detallados con cálculos breves.

Esta teoría fué desarrollada por el autor en los años 1943/44 [4] y una teoría que sigue las mismas ideas ha sido publicada por *R. E. Graham* en el año 1946 [5].

---

(*) Comunicación a las terceras jornadas matemáticas argentinas.

Los equipos automáticos de Radar presentaron problemas que indujeron a *Wiener* y a *Graham* a desarrollar sus teorías, sirviéndoles al mismo tiempo de ejemplo en la presentación de estas. Como ejemplo que facilitará la exposición de nuestra teoría nos conviene tomar el mismo equipo.

Los equipos automáticos radar producen una imagen del camino del avión que corresponde a la realidad con gran precisión. Se determina p. ej. una distancia de 10 kilómetros con una precisión de 10 metros. La pequeña diferencia del orden de $10^{-3}$ se compone de dos partes: hay perturbaciones de carácter estadístico como el ruido de fondo del receptor del radar y hay errores sistemáticos que corresponden a una «inercia» del servomecanismo. Si aumenta la inercia, aumenta el error sistemático, pero en cambio se reduce la influencia de las fluctuaciones que entran en el dispositivo. Por lo tanto se debe minimalizar el error total del servomecanismo, dando valores adecuados a los parámetros del sistema, p. ej., a la mencionada inercia.

## *Teoría elemental.*

Será útil analizar brevemente un sencillo modelo geométrico que posee algunas de las propiedades esenciales de los servomecanismos.

Nos planteamos el problema de evaluar las derivadas de las coordenadas del avión en base a los valores aproximados de dichas coordenadas dados por el equipo radar. Introducimos la inercia del modelo reemplazando los cocientes diferenciales por los correspondientes cocientes de diferencias, p. ej., reemplazando la tangente de la trayectoria del avión por la secante por dos puntos en la distancia temporal $t_m$; se forma así un valor medio de la tangente durante el intervalo $t_m$, lo que permite eliminar cierta parte de las perturbaciones estadísticas que entran en el dispositivo junto con la señal. Es suficiente analizar este esquema para una sola coordenada $x(t)$; siendo $x(t)$ el valor preciso de dicha coordenada y $X(t)$ el valor indicado por el dispositivo, el error $\Delta_x$ se define por la ecuación

$$\Delta_x = X(t) - x(t).$$

En el caso de la derivada usamos símbolos análogos, llamando a la velocidad real $v = \frac{dx}{dt}$, a la velocidad indicada por nuestro modelo $V(t)$ y al correspondiente error $\Delta_v = V(t) - v(t)$

El error total se compone del error sistemático $\Delta_v{}^s$ y del error estadístico $\Delta_v{}^r$

$$\Delta_v = \Delta_v{}^r + \Delta_v{}^s.$$

Siendo $v$ la velocidad del avión, $b$ su aceleración, obtenemos con suficiente aproximación las siguientes relaciones

$$x(t) = x(0) + vt + \frac{b}{2}\, t^2$$

$(v \leqq 200$ m/seg; $b \leqq 2\,g \sim 20\,\mathrm{m/seg}^2$; $t \leqq 10\,\mathrm{seg})$

$$V(0) = v - \frac{b}{2}\, t_m.$$

Resulta como error sistemático en la determinación de la velocidad

$$\Delta_v{}^s = -\frac{b}{2}\, t_m.$$

Supongamos que el valor medio del error estadístico de la coordenada sea $\overline{\Delta}_x$ ($\sim 10$ m), que la distribución de los valores aproximados de la coordenada dados por el radar, sea una distribución de *Gauss* y que los valores de $\Delta_x$ en la distancia temporal $t_m$ ya sean independientes. Si los errores estadísticos no satisfacieran esta última condición, la evaluación de un valor medio durante el intervalo $t_m$ sería poco eficiente para reducir la contribución de las perturbaciones al error total. Resulta así el siguiente error estadístico de la velocidad

$$\overline{\Delta}_v{}^r = \sqrt{2}\, \frac{\overline{\Delta}_x}{t_m}.$$

(Usamos el símbolo $\Delta_x$ por razones de brevedad en vez de $\sqrt{\overline{\Delta_x^2}}$).

Si la distribución de los valores de la aceleración $b$ también es una distribución de *Gauss* (en el caso del error sistemático esta suposición es menos natural que en el de las perturbaciones), se calcula el valor mínimo del error total en función de $t_m$ según las siguientes ecuaciones

$$\overline{\Delta_v^2} = (\overline{\Delta_v^r})^2 + (\overline{\Delta_v^s})^2 \longrightarrow \text{mín.}$$

$$\frac{\partial \overline{\Delta_v^2}}{\partial t_m} = 0$$

$$\overline{\Delta_v^s} = \overline{\Delta_v^r}$$

o sea

$$t_m^2 = 2\sqrt{2}\,\frac{\overline{\Delta_x}}{\overline{b}} .$$

En el caso de nuestro modelo resulta entonces un error sistemático proporcional a $t_m$. Es verdaderamente una inercia, un retraso del dispositivo como indica el signo negativo en la fórmula de $\Delta_v^s$. En cambio el error estadístico es inversamente proporcional a $t_m$; por lo tanto existe un valor óptimo de ese parámetro y en el caso del modelo resulta el mínimo del error total, cuando los errores estadísticos y sistemáticos son iguales.

Quizás sería posible analizar las propiedades de muchos sistemas prácticos según métodos sencillos y directos adaptados a los casos particulares. Pero queda el problema del dispositivo óptimo.

Debemos preguntarnos, si otros sistemas para eliminar las perturbaciones, distintos de los que hemos estudiado, darían errores totales esencialmente menores. En el siguiente párrafo aplicaremos a los servomecanismos lineales métodos bien conocidos en la teoría de los circuitos lineales eléctricos, y los resultados demostrarán que pueden obtenerse ventajas considerables sobre los sistemas que poseen un retraso de un tipo tan simple como el de nuestro modelo.

*Teoría de los servomecanismos lineales en base a sus transferencias.*

En general un servomecanismo lineal es un dispositivo electromecánico que satisface un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Por lo tanto todas sus propiedades pueden expresarse por medio de su transferencia, en otras palabras por la respuesta del servomecanismo a la excitación del tipo particular $x(t)=e^{pt}$ con $p=\nu+j\omega$, siendo $x(t)$ la magnitud controlada por el servomecanismo.

La respuesta que resulta es del mismo tipo

$$X(t)=T(p)\,e^{pt};$$

como antes la diferencia $\Delta$ es el error del servomecanismo

$$\Delta=X(t)-x(t).$$

Al cociente $T(p)=\dfrac{X(t)}{e^{pt}}$, lo llamamos la transferencia del sistema la cual es una función de la frecuencia compleja $p$. Es fácil calcular o medir esa transferencia en casos de la práctica. Si conocemos $T(p)$ para todos los valores $0\leqq\omega\leqq\infty, \nu=0$, podemos calcular la respuesta $X(t)$ a la excitación $x(t)$ de forma arbitraria. Supongamos p. ej. que $x(t)$ admite una representación por una integral de *Fourier*

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega.$$

Entonces obtenemos para la respuesta

$$X(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} T(j\omega)\,f(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega.$$

Todo esto es bien conocido en la teoría de los circuitos eléctricos. Mientras en general tales integrales no admiten una evaluación sencilla como lo demuestra la teoría de los transitorios en los circuitos eléctricos, es posible establecer una relación manejable en la teoría de los servomecanismos lineales de alta precisión que sirven para el control de una magnitud de variación lenta como p. ej., la coordenada de un avión o de una nave que no puede ser discontinua, como tampoco pueden serlo las derivadas de dicha coordenada.

Es sabido que la transferencia $T(p)$ de un servomecanismo estable es una función analítica regular en el semiplano $\nu \geqq 0$. Existe entonces una serie

$$T(p) = \sum_0^\infty a_n p^n$$

convergente para $|p| \leqq P > 0$. Por ser la variación de $x$ lenta, es natural representar también $x(t)$ por una función analítica regular para valores reales de $t$. Existe entonces una serie

$$x(t) = \sum_0^\infty x_{(0)}{}^{(n)} \frac{t^n}{n!}$$

convergente para $|t| \leqq t_0 > 0$. La requerida relación manejable entre la excitación $x$ y la respuesta $X$ del servomecanismo es la siguiente

$$(1) \qquad \Delta = X(t) - x(t) \sim \sum_0^\infty a_n \frac{d^n x}{dt^n}.$$

Es evidente que el error $\Delta$ está compuesto por términos proporcionales a la velocidad, a la aceleración, etc., los cuales admiten una interpretación física directa. Además en general los primeros dos o tres términos bastan para cálculos numéricos. Esta serie es convergente, si $x(t)$ es una función entera, en general es semiconvergente; pero siempre que la precisión del servomecanismo sea buena, su convergencia numérica es excelente.

Es sabido que también la influencia de las perturbaciones estadísticas sobre la respuesta $X(t)$ se calcula fácilmente en base a la transferencia. Para muchas aplicaciones es suficiente suponer que el error estadístico es proporcional al llamado ancho de banda $\Omega$ del sistema.

$$\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} |T|^2 \, d\omega .$$

Caracterizamos entonces la eliminación de las perturbaciones por el parámetro $\Omega$ y nos proponemos evaluar el mínimo del error sistemático compatible con un valor dado del ancho de banda $\Omega$.

*Estudio del error sistemático en función de la transferencia.*

Primero debemos demostrar las mencionadas propiedades de la serie

$$\Delta(t) \sim \sum_{1}^{\infty} a_n \frac{d^n x}{dt^n} .$$

La representación de la respuesta en la forma

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(j\omega)\, f(j\omega)\, e^{j\omega t} \, d\omega \tag{2}$$

indica que un sistema fiel posee la transferencia $T \equiv 1$ y con eso el ancho de banda $\Omega = \infty$, entonces reproduce no solo la señal sino también las perturbaciones con fidelidad. Si la reproducción de una magnitud de variación sumamente lenta es fiel, la transferencia satisface la ecuación $T(0) = 1$. Si la precisión del servomecanismo es elevada, la desviación de la transferencia del valor $T = 1$ debe ser pequeña para todas las frecuencias $\omega$ para las cuales el espectro $f(j\omega)$ de la excitación $x(t)$ no es prácticamente cero. Esto sugiere desarrollar la transferencia en una serie de *Taylor*

$$T(p) = \sum_{0}^{\infty} a_n p^n .$$

Las frecuencias de contribución esencial a la integral (2) se encontrarán en el intervalo de buena convergencia numérica de esta serie.

La integral de *Fourier* no admite la representación de todas las funciones analíticas que interesan en la práctica. Sin embargo, usándola sin escrúpulos, resulta la serie requerida. Substituímos así la serie de $T(p)$ en la integral

$$X(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \sum_0^\infty a_n\, p^n f(p)\, e^{pt}\, dp = \sum_0^\infty a_n \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} p^n f(p)\, e^{pt}\, dp.$$

Las integrales bajo la sumatoria se obtienen por diferenciación formal

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \frac{d^n}{dt^n}\,\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} f(p)\, e^{pt}\, dp = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} p^n f(p)\, e^{pt}\, dp$$

o sea

$$X(t) = \sum_0^\infty a_n \cdot \frac{d^n x}{dt^n}\,.$$

Esta demostración es breve, pero desprecia toda consideración de convergencia y no permite un análisis del orden de la aproximación. La reemplazamos por otra más satisfactoria.

Para todas las funciones analíticas que pueden figurar como excitaciones $x(t)$ (son funciones con segunda derivada acotada por ser acotadas las fuerzas mecánicas) existe una representación de la respuesta $X(t)$ del siguiente tipo

$$X(t) = \int_0^\infty x(t-\tau)\, K(\tau)\, d\tau$$

con

$$K(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} T(p)\, e^{pt}\, dp$$

y su inversión

$$T(p) = \int_0^\infty K(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

La integral $K(t)$ existe para todos los servomecanismos estables con ancho de banda finito por disminuir $T(p)$ por lo menos como $p^{-1}$ para $p \to \infty$. $K(t)$ es una función de la forma

$$K(t) = \sum_0^M P_m(t)\, e^{+p_m t} \quad \text{con} \quad p_m = \nu_m + j\omega_m,\ \nu_m < 0$$

$P_m$ es un polinomio $K(t)$ es una suma de todas las oscilaciones libres del servomecanismo, amortiguadas en el caso de dispositivos estables. Es suficiente analizar la integral para $t = 0$

$$X(0) = \int_0^\infty x(-\tau)\, K(\tau)\, d\tau.$$

La serie de $X$ es asintótica con respecto a un parámetro que es la unidad de frecuencia. Para ponerlo de manifiesto reemplazamos $T(p)$ por $T(p/s)$. Se transforma también $K(t)$

$$K(t) \to s\,\mathrm{K}(st) = s \sum_0^M P_m(st)\, e^{p_m st}.$$

Lo substituímos en la integral

$$X(0) = s \int_0^\infty x(-\tau) \sum_0^M P_m(s\tau)\, e^{p_m s\tau}\, d\tau.$$

El comportamiento asintótico de tales integrales es bien conocido [6]. Si

$$\frac{x(t) - \sum_0^N b_n t^n}{t^{n+1}} \to c_1 \quad \text{para} \quad t \to 0$$

resulta

$$s^{n+1}\{X(0)-s\int_0^\infty[\sum_0^N b_n(-\tau)^n]\,K(\tau)\,d\tau\}\longrightarrow c_2\quad\text{para}\quad s\longrightarrow\infty.$$

La evaluación de la suma finita es sencilla

$$s\int_0^\infty\sum_0^N b_n(-\tau)^n\,K(\tau s)\,d\tau=s\sum_0^N b_n\int_0^\infty(-\tau)^n\,K(\tau s)\,d\tau.$$

La comparación con las relaciones

$$\int_0^\infty s\,K(\tau s)\,e^{-p\tau}\,d\tau=T(p/s)$$

$$\frac{d^n}{dp^n}\int_0^\infty s\,K(\tau s)\,e^{-p\tau}\,d\tau=\int_0^\infty s\,K(\tau s)\,(-\tau)^n\,e^{-p\tau}\,d\tau$$

$$\int_0^\infty s\,(-\tau)^n\,K(\tau s)\,d\tau=\left[\frac{d^nT(p/s)}{dp^n}\right]_{p=0}=n!\;a_n$$

nos da la serie asintótica

$$X(0)\sim\sum_0^\infty b_n\left[\frac{d^nT(\frac{p}{s})}{dp^n}\right]_{p=0}=\sum_0^\infty a_n\,\frac{d^nx}{dt^n}\,.$$

Es casi trivial que cualquier dispositivo con $T(0)=1$, permite reducir el error sistemático a valores arbitrariamente pequeños por medio del aumento del ancho de banda $\Omega$ proporcional a $s$. Pero la serie asintótica nos da una información mucho más precisa. Puede decirse que un servomecanismo para el control de una magnitud continua, es un dispositivo de alta precisión si la convergencia numérica de la serie es buena. Queda por demostrar que en general los dos o tres primeros términos son suficientes para el cálculo numérico del error.

Aplicamos la serie a unos ejemplos sencillos. Supongamos que la trayectoria del avión sea una línea recta en la distancia mínima $d$ desde el equipo, que la velocidad $v=100$ m/seg. sea constante y que la coordenada $x(t)$ que determina el servomecanismo, sea el ángulo azimutal; resulta entonces

$$x(t)=\operatorname{arctg}\frac{vt}{d}.$$

$$\frac{d^n x}{dt^n}=\left(\frac{v}{d}\right)^n\left[\frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}}\,\frac{1}{1+\tau^2}\right]_{\tau=\frac{vt}{d}}=$$

$$=\left(\frac{v}{d}\right)^n\frac{(-)^{n-1}(n-1)!}{2j}\left[\frac{1}{(\frac{vt}{d}-j)^n}-\frac{1}{(\frac{vt}{d}+j)^n}\right].$$

Las transferencias son funciones racionales de $p$. La más sencilla función racional con un ancho finito de banda es

$$T(p)=\frac{1}{1+\vartheta p}=\sum_0^\infty(-\vartheta p)^n.$$

La constante $\vartheta$ es la llamada constante de tiempo de esta transferencia la cual se puede realizar por medio de un circuito eléctrico compuesto de un sólo condensador y de una sola resistencia. Obtenemos así

$$\Delta(t)=X(t)-x(t)\sim-\sum_0^\infty\left(\frac{v\vartheta}{d}\right)^n\frac{(n-1)!}{2j}\left[\frac{1}{(\frac{vt}{d}-j)^n}-\frac{1}{(\frac{vt}{d}+j)^n}\right]$$

y en particular para $t=0$

$$\Delta(0)\sim\sum_0^\infty(-)^{n+1}\left(\frac{v\vartheta}{d}\right)^{2n+1}(2n)!.$$

La serie es semiconvergente. Si atribuímos a la constante $\vartheta$ el valor numérico $\vartheta=1$ seg. y si atribuímos a la distancia mínima el valor $d=1000$ m, obtenemos

$$\Delta(0) = -0{,}1 + 0{,}002 - 0{,}00006\ldots\ldots$$

o en grados

$$\Delta(0) = -5{,}7^{\circ}.$$

Para reducir el error sistemático hay que reducir la constante de tiempo y la convergencia numérica será aún más rápida.

El ejemplo del ángulo azimutal demuestra que una coordenada que no es cartesiana puede ser una función discontinua a pesar de que el movimiento físico sea continuo. En un punto de discontinuidad ($d = 0$, $t = 0$) la serie no sirve y el servomecanismo tampoco.

En vez de la trayectoria rectilínea suponemos ahora que el piloto del avión se propone hacer movimientos irregulares, que modifica el rumbo cada 10 seg. Esto se expresa en forma matemática por la imposibilidad de usar la serie de *Taylor* para la extrapolación de la trayectoria a intervalos mayores de 10 seg., es decir para $t_w = 10$ seg. muchos términos de la serie

$$x(t) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n x}{dt^n} t^n$$

son aproximadamente iguales al término de $n = 1$ o sea

$$\frac{d^n x}{dt^n} \sim n! \frac{\vartheta}{t_w{}^{n-1}}$$

Resulta otra vez una serie semiconvergente para el error sistemático

$$\Delta(0) = X(0) - x(0) \sim \sum_1^{\infty} (-)^n n!\, v\vartheta \left(\frac{\vartheta}{t_w}\right)^{n-1} =$$

$$= [-100 + 20 - 6 \ldots]\, m.$$

Como último ejemplo tratamos una trayectoria circular con diámetro pequeño a gran distancia del equipo. En este caso la distancia varía según

$$x(t)=\frac{v^2}{b}\operatorname{sen}\frac{bt}{v}=Im\left\{\frac{v^2}{b}\,e^{j\frac{bt}{v}}\right\}$$

y resulta el error

$$\Delta(t)=Im\left\{\sum_{1}^{\infty}(-\vartheta)^n\,\frac{v^2}{b}\left(j\frac{b}{v}\right)^n e^{j\frac{b}{v}t}\right\}$$

$$=Im\left\{\left(\frac{1}{1+j\frac{\vartheta b}{v}}-1\right)\frac{v^2}{b}\,e^{j\frac{bt}{v}}\right\}.$$

La serie es convergente para $\frac{\vartheta b}{v}<1$ y el resultado es correcto según lo demuestra su comparación con la transferencia

$$T(p)=\frac{1}{1+\vartheta p}\quad \text{para}\quad p=j\,\frac{b}{v}\,.$$

Una serie del tipo (1) ha sido aplicada a un problema radiotécnico por *Carson* y *Fry* quienes estudian la respuesta de un circuito lineal a ondas moduladas en frecuencia [7]. El desarrollo de la transferencia en la Serie de *Taylor* ha sido aplicado a los servomecanismos por *R. E. Graham* y por el autor [5] y [4].

*La reducción del error sistemático.*

Se ve que en el caso de la transferencia $T=\frac{1}{1+p\vartheta}$ como en el del modelo geométrico domina aquella parte del error sistemático que es proporcional a la primera derivada de la magnitud controlada. Pueden esperarse entonces reducciones considerables del error sistemático si se usan transferencias cuya primera derivada o cuyas primeras $n$ derivadas se anulan. Son las transferencias de la forma

$$(3)\quad T(p)=\frac{1+\alpha_n p+\alpha_{n-1}p^2+\ldots\alpha_1 p^n}{1+\alpha_n p+\alpha_{n-1}p^2+\ldots\alpha_1 p^n+\alpha_0 p^{n+1}+\ldots\alpha_{-m}p^{n+m+1}}\,.$$

El grado del denominador es mayor que el del numerador, por ser el ancho de banda $\Omega$ finito, y las raíces del denominador poseen parte real negativa por ser el dispositivo estable. Los coeficientes $\alpha_\nu$ son reales y positivos como siempre en aquellas funciones racionales que representan transferencias. El número de elementos que se precisa en un circuito práctico para realizar la transferencia, aumenta con los grados del numerador y del denominador. Será natural clasificar las transferencias según los dos grados y determinar los valores de los parámetros que producen el valor mínimo del ancho de banda. Estudiamos en particular las transferencias del tipo

$$\text{(3a)} \quad T(p)=\frac{1+\alpha_n p+\alpha_{n-1}p^2+\ldots\alpha_1 p^n}{1+\alpha_n p+\alpha_{n-1}p^2+\ldots\alpha_1 p^n+\alpha_0 p^{n+1}};$$

con esas transferencias resulta el número máximo de derivadas nulas compatible con el grado dado del denominador. La primera derivada que no se anula posee el valor

$$\left[\frac{d^{n+1}T}{dp^{n+1}}\right]_{p=0}=-(n+1)!\,\alpha_0.$$

Resulta entonces un problema bien definido si buscamos el valor mínimo del ancho de banda

$$\Omega=\int_{-\infty}^{\infty}|T|^2 d\omega \rightarrow \text{mín},$$

dando el valor de la primera derivada que no se anula, al cual normalizamos según

$$\left[\frac{d^{n+1}T}{dp^{n+1}}\right]_0=-(n+1)! \quad \text{o sea} \quad \alpha_0=1.$$

Antes de empezar el correspondiente cálculo algebraico, ya será posible obtener unas ideas descriptivas de dichas transferencias.

Nos proponemos demostrar que la parte real de la transferencia (en función de $\omega$) posee un mínimo para $p=0$, si se anula $\left(\frac{dT}{dp}\right)_{p=0} = 0$ y que los máximos que por lo tanto existen a los lados ($|\omega| > 0$) de la frecuencia $p = 0$, resultan más y más acentuados si aumentamos el número de las derivadas de la transferencia que se anulan. Este hecho tiene dos consecuencias de trascendencia técnica. Los picos de la transferencia indican la existencia de frecuencias de resonancia. A pesar de que en el sentido riguroso un sistema sea estable siempre que sus oscilaciones libres sean amortiguadas, son poco estables en la práctica si los picos de la transferencia son muy agudos. Además es sabido que los transitorios no son monótonos, sino oscilatorios, siempre que existen frecuencias $p = j\omega$ con $|T(j\omega)| > T(0)$. Esto tampoco es requerido; sin embargo la monotonía de los transitorios no es una propiedad imprescindible de los servomecanismos de alta precisión [8].

La transferencia $T(p)$ es una función analítica en el semiplano $\nu \geqq 0$. Por lo tanto sus partes real e imaginaria son funciones regulares de potencial en dicho semiplano. Poniendo $T = R + jX$ aplicamos las ecuaciones de *Cauchy-Riemann* a $R$ y $X$

$$\frac{\partial R}{\partial \nu} = \frac{\partial X}{\partial \omega}.$$

Si se anula

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)_{p=0} = 0.$$

o sea

$$T(j\omega) = T(0) + j\omega \cdot 0 - \frac{\omega^2}{2!}\left(\frac{d^2T}{dp^2}\right)_{p=0} + \ldots$$

se anula también

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)_0 = \left(\frac{\partial R}{\partial \nu}\right)_0 = 0$$

Interpretamos el gradiente del potencial $R$ como un sistema de líneas de corriente. Por ser $R$ regular para $\nu \geqq 0$, es decir por no existir fuentes positivas o negativas en el semiplano positivo, las líneas de corriente entran a través del borde $\nu = 0$ en regiones de alto potencial y dejan al semiplano en regiones del borde $\nu=0$ de potencial pequeño o negativo. El potencial $R$ asume valores grandes en el interior del ancho de banda $|\omega| \leqq \Omega$ y valores pequeños afuera del mismo $|\omega| > \Omega$. Si fuese $T(0) > |T(j\omega)|$ resultaría también $T(0) > |T(\nu + j\omega)|$ para $\nu \geqq 0$, porque el módulo de una función analítica toma su valor máximo en el borde de un recinto de regularidad; por la tanto la derivada

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \nu}\right)_0 = \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)_0 < 0$$

es negativa y no se anula.

Un máximo de $T(j\omega)$ para $\omega = 0$ que es condición necesaria [8] para la monotonía de los transitorios, no es compatible con la otra propiedad requerida de la transferencia

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)_0 = 0,$$

la cual importa más que la monotonía. Si se anulan más y más derivadas

$$\left[\left(\frac{d^nT}{dp^n}\right)_0 = 0 \quad \text{para} \quad n \leqq N\right],$$

la montaña del potencial posee un altiplano en la vecindad de $p = 0$; deben pues existir picos más y más agudos de $R$ en la vecindad de las frecuencias de corte $\omega = \pm\Omega$ que compensan a la tendencia de que disminuya el potencial hacia el interior del semiplano positivo. Esto indica que entre todas las transferencias del tipo (3) solo las de valores pequeños de $n$ sirven en la práctica. Es evidente que las limitaciones que acabamos de exponer, son típicas no solo de las transferencias racionales, sino también de las transferencias arbitrarias, incluídas las soluciones del problema extremal formulado y analizado por *Wiener* [1].

Volvamos al problema de determinar el mínimo del ancho de banda en función de los parámetros $\alpha_1 \ldots \alpha_n$.

$$\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} |T|^2 \, d\omega = -j \int_{-j\infty}^{j\infty} T(p)\, T(-p)\, dp.$$

Poniendo

$$T(p) = \frac{g(p)}{H(p)} = \frac{H(p) - p^{n+1}}{H(p)}$$

con

$$H(p) = \prod_{1}^{n+1} (p - p_\nu)$$

y aplicando el cálculo de residuos, obtenemos

$$\Omega = 2\pi \sum_{1}^{n+1} \frac{g(p_\nu)\, g(-p_\nu)}{H'(p_\nu)\, H(-p_\nu)}$$

con

$$H'(p_\nu) = \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n+1} (p_\nu - p_\mu).$$

Substituyendo

$$g(p_\nu) = H(p_\nu) - p_\nu^{n+1} = -p_\nu^{n+1} \quad \text{y} \quad g(-p_\nu) = H(-p_\nu) - (-p_\nu)^{n+1}$$

resulta

$$\Omega = 2\pi \sum \frac{-p_\nu^{n+1}}{H'(p_\nu)} + 2\pi \sum \frac{(-)^{n+1}\, p_\nu^{2n+2}}{H'(p_\nu)\, H(-p_\nu)}$$

$$= -2\pi \sum_{\nu} \frac{p_\nu^{n+1}}{\prod\limits_{\substack{\mu \\ \mu \neq \nu}} (p_\nu - p_\mu)} + \pi \sum_{\nu} \frac{p_\nu^{2n+1}}{\prod\limits_{\substack{\mu \\ \mu \neq \nu}} (p_\nu^2 - p_\mu^2)} = \Omega_1 + \Omega_2$$

Buscamos el denominador común de $\Omega_1$

$$\Omega_1 = \frac{2\pi \sum\limits_{\nu=1}^{n+1} (-)^{n-\nu}\, p_\nu^{n+1} \prod\limits_{\nu \neq \mu > k \neq \nu} (p_\mu - p_k)}{\prod\limits_{\nu > \mu} (p_\nu - p_\mu)}$$

y el de $\Omega_2$

$$\Omega_2 = \frac{\pi \sum\limits_{\nu=1}^{n+1} (-)^{n+1-\nu} \; p_\nu^{2n+1} \prod\limits_{\nu=|=\mu>k=|=\nu} (p_\mu^2 - p_k^2)}{\prod\limits_{\nu=\mu} (p_\nu^2 - p_\mu^2)}.$$

$\Omega_1$ y $\Omega_2$ no son infinitos si coinciden dos raíces $p_\nu$. Por lo tanto los numeradores de $\Omega_1$ y $\Omega_2$ contienen el factor $\prod\limits_{\nu>\mu}(p_\nu - p_\mu)$, y $\Omega_1$ es un polinomio simétrico de las raíces $p_\nu$. Demuestra la inspección de los grados del numerador y del denominador de $\Omega_1$, que ese polinomio es lineal en las raíces

$$\Omega_1 = 2\pi\,\alpha_1.$$

La comparación del numerador o denominador de $\Omega_2$ con una fórmula bien conocida para el producto

$$\prod_{\nu>\mu} (p_\nu - p_\mu) = |1, p_\nu, p_\nu^2, \dots p_\nu^n| \qquad [9]$$

demuestra que $\Omega_2$ puede expresarse como cociente de dos determinantes

$$\Omega_2 = \frac{\pi\,|1, p_\nu^2, p_\nu^4, \dots p_\nu^{2n-2}, p_\nu^{2n+1}|}{|1, p_\nu^2, p_\nu^4, \dots p_\nu^{2n-2}, p_\nu^{2n}|}.$$

Los dos determinantes son del tipo llamado bialternantes los cuales pueden calcularse en función de los $\alpha_n$ según un teorema de *Jacobi* [10]

$$\Omega_2 = -\pi \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \dots\dots\dots\dots & & \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 \dots\dots\dots & \\ \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \dots\dots \\ \alpha_6 & \alpha_5 \dots\dots\dots\dots & & & \\ \dots\dots\dots\dots & & & & \alpha_{n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \dots\dots\dots\dots & & \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 \dots\dots \\ \alpha_5 & \alpha_4 \dots\dots\dots\dots & & & \\ \dots\dots\dots\dots & & & & \alpha_{n+1} \end{vmatrix}}.$$

con $\alpha_{n+1} = 1$.

Sumando obtenemos

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 = -\pi \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1, -1 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ \alpha_2, & \alpha_1 & 1 & 0 \ldots\ldots\ldots & \\ \alpha_4, & \alpha_3, & \alpha_2, & \alpha_1 & 1 \quad 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \alpha_{n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 \ldots\ldots \\ \alpha_5 & \alpha_4 \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \alpha_{n+1} \end{vmatrix}}.$$

Siempre que una raíz $p_\nu$ y con ella los coeficientes $\alpha_\nu$ del polinomio $H(p)$ aumenten sin límite, lo hace también el ancho de banda $\Omega$.

Por lo tanto es posible determinar el mínimo del ancho de banda en función de los coeficientes $\alpha_\nu$ por medio de las ecuaciones

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_\nu} = 0 \quad \text{para} \quad \nu = 1, 2 \ldots n.$$

Además $\Omega$ aumenta sin límite, si una raíz se aproxima al eje imaginario. Por lo tanto para una de las soluciones del último sistema de ecuaciones las raíces $p_\nu$ poseen parte real negativa, de manera que la transferencia corresponde a un servomecanismo estable. Los requeridos parámetros óptimos y las transferencias óptimas son

| $n$ | $\alpha_{n+1}$ | $\alpha_n$ | $\alpha_{n-1}$ | $\alpha_{n-2}$ | $\Omega$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | $\pi$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | $2\pi$ |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | $3\pi$ |
| 3 | 1 | 1 | 3 | 2 | $4\pi$ |

$$T_0(p) = \frac{1}{1+p} \qquad T_2 = \frac{1+p+2p^2}{1+p+2p^2+p^3}$$

$$T_1(p) = \frac{1+p}{1+p+p^2} \qquad T_3 = \frac{1+p+3p^2+2p^3}{1+p+3p^2+2p^3+p^4}.$$

Mencionamos la posibilidad de realizar estas cuatro transferencias como impedancias de circuitos eléctricos.

El siguiente cálculo numérico nos da algunas informaciones cuantitativas de las ventajas prácticas, que pueden realizarse por medio de las reducciones considerables del error sistemático, al pasar de la transferencia $T_0$ a $T_1$. Tratamos otra vez el ejemplo del rumbo irregular de un avión con

$$\frac{d^n x}{dt^n} \sim n! \, \frac{v}{t_w{}^{n-1}} \; ; \; v = 100 \text{ m/seg}; \; t_w = 10 \text{ seg.}$$

En vez de normalizar las transferencias por la condición $\alpha_0 = 1$, igualamos para la siguiente comparación, el ancho de banda $\Omega$:

| | | |
|---|---|---|
| $T_0(p_0)$ | $\Omega^{(0)} = \pi p_0 = \frac{\pi}{\vartheta}$ | $T_0 \sim 1 - \vartheta p$ |
| $T_1(p_0)$ | $\Omega^{(1)} = 2\pi p_0 = \frac{\pi}{\vartheta}$ | $T_1 \sim 1 - (2\vartheta p)^2$ |
| $T_2(p_0)$ | $\Omega^{(2)} = 3\pi p_0 = \frac{\pi}{\vartheta}$ | $T_3 \sim 1 - (3\vartheta p)^3$ |
| $T_3(p_0)$ | $\Omega^{(3)} = 4\pi p_0 = \frac{\pi}{\vartheta}$ | $T_4 \sim 1 - (4\vartheta p)^4.$ |

Eligimos $\vartheta = 0{,}1$ seg. correspondiente a un error de 10 m para $n = 0$.

Usando el término dominante en la serie asintótica (1) para el error sistemático, obtenemos

| $n$ | $\Delta_s$ |
|---|---|
| 0 | 10 m |
| 1 | 0,8 m |
| 2 | 0,162 m |
| 3 | 0,0615 m. |

Estos valores demuestran que por suerte una ventaja considerable ya aparece con la transferencia $T_1$ y que amenudo no vale la pena ensayar el uso de las transferencias con $n > 1$, a las cuales corresponden circuitos más complicados, menos estables y con transitorios fuertemente oscilatorios

# BIBLIOGRAFIA


1. N. WIENER, Extrapolation, Interpolation and smoothing of stationary time series with engineering applications. New York. Wiley and Sons. (1949).
2. N. LEVINSON The WIENER root Mean square error criterion in filter design and prediction. Journ. of Math. and Phy. 25 (1947), 261.
   A heuristic exposition of WIENER's mathematical theory of prediction and filtering. Journ. of Math. and Phys. 26 (1947) 110.
3. H. W. BODE and C. E. SHANNON. A simplified derivation of linear least square smoothing and prediction theory. Proc. Inst. Rad. Eng. 38 (1950) 417.
4. K. FRÄNZ, Informes de la Telefunken Berlin E. C. 99 y 104 (1943 y 1944).
5. R. E. GRAHAM, Linear servo theory. Bell. Syst. Tech. Journ. 25 (1946), 616.
6. G. DOETSCH, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin. J. SPRINGER (1937) S. 230/234.
7. J. R. CARSON and T. C. FRY, Variable frecuency electric circuit theory with applications to the theory of frecuency modulation. Bell. Syst. Tech. Journ. 16 (1937), 513.
8. K. FRÄNZ, Relaciones entre señal y espectro. Revista de la UMA 14 (1950), 140.
9. H. WEBER, Lehrbuch der Algebra. Braunschweig. Fr. Vieweg (1928), S. 8.
10. A. C. AITKEN, Determinantes y matrices. Madrid/Buenos Aires. Editorial Dossat. 4ª Edición. S. 117/1224.