UNION MATEMATICA ARGENTINA

Resúmenes de las comunicaciones de la reunión del
21 de setiembre de 1956

MARÍA L. BRUSCHI y MISCHA COTLAR, *Sobre el teorema de convexidad de Riesz-Thorin - Marcinkiewicz.*

Un operador $A = Af$ se dice de tipo (p, r) si transforma funciones del espacio L^r en funciones del espacio L^r y vale $||Af||_r \leq M_{p,r}||f||_p$ para toda $f \in L^p$. El teorema de Riesz-Thorin afirma que si A es de tipo (p_i, r_i), $i = 1, 2$, entonces A es de tipo (p, r) para

$$\frac{1}{p} = \frac{t}{p_1} + \frac{1-t}{p_2}, \quad \frac{1}{r} = \frac{t}{r_1} + \frac{1-t}{r_2} \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

valiendo

$$M_{p,r} \leq M_{p_1,r_1}{}^t + M_{p_2,r_2}{}^{1-t}.$$

Marcienkiewicz generalizó el teorema reemplazando en la hipótesis la condición ''tipo'' por ''semi-tipo'' (A es de semi-tipo (p, r) si vale $D_{Af}(\lambda) \leqq \leqq \left\{\frac{M_{p,r}}{\lambda}||f||_p\right\}^r$ donde $D_g(\lambda)$ es la función de distribución de g). Sin embargo la tesis de Marcinkiewicz dice que $M_{p,r} \leqq C_{p,r}\, M_{p_1,r_1}{}^t + M_{p_2,r_2}{}^{1-t}$ donde $C_{p,r} \to \infty$ si $t \to 0$ o si $t \to 1$. Introduciendo un concepto de N-semitipo (p, r) se da un teorema que incluye como casos particulares el de Riesz (para $N = \infty$) y el de Marcinkiewicz (para $N = 1$); la demostración es más elemental que la de Riesz. Se estudian diversas aplicaciones. Usando los teoremas de representación de Gelfand, Kantorovich y Dunford se estudian diversos refinamientos y nuevas formas de estos teoremas donde aparecen ''regiones cónicas'' en vez de ''poligonales'', para operadores dados por núcleos simétricos (en la representación correspondiente).

GREGORIO KLIMOVSKY, *Tres enunciados equivalentes al teorema de Zorn.*

Se demuestra que los siguientes tres enunciados son equivalentes al teorema de Zorn:

I) En todo conjunto B de un álgebra de Boole A existe un subconjunto C, maximal en B respecto de la propiedad de ser no contradictorio en A.

II) En todo subconjunto B de fórmulas de un cálculo proposicional bivalente general A, existe un subconjunto C, maximal respecto de la propiedad de ser no contradictorio en A.

III) En todo sistema sintáctico simple existe un subconjunto de enunciados del sistema, maximal respecto de la propiedad de ser no contradictorio en el sistema.

Se demuestra también que, para todo sistema sintáctico S hay un álgebra de Boole A tal que existe una correspondencia biunívoca entre todos los subconjuntos de S y algunos subconjuntos de A, de modo que un subconjunto de S es contradictorio en S si y sólo si el correspondiente subconjunto de A es contradictorio en A.

Este resultado, que viene a constituir una ciertta teoría de representaciones de los sistemas sintácticos simples sobre las álgebras de Boole, se utiliza para demostrar que el enunciado II implica al III. Las implicaciones de III a Z, (Z es el teorema de Zorn), de Z a I y de I a II son sencillas. Con lo que queda establecida la equivalencia de los cuatros enunciados.

GREGORIO KLIMOVSKY, *Nota sobre el problema de los cuatro colores.*

Se demuestra que, si existe un mapa con infinitos países que no puede colorearse con 4 colores, debe existir otro con un número finito de países que tampoco puede colorearse con 4 colores.

Se utiliza para establecer la demostración el teorema de completicidad (de Gödel) para el cálculo proposicional.

Utilizando el teorema de completicidad para el cálculo proposicional bivalente general (teorema de Gödel-Malcev proposicional), puede extenderse el resultado a gráficos cualesquiera, y a un número k cualquiera de colores.

VERA SPINADEL y EMILIO ROXIN, *Sobre un problema de control para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.*

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de primer orden, con coeficientes variables, el agregado de términos que hagan no homogéneo el sistema, puede interpretarse como la introducción de fuerzas exteriores al mismo. Cabe preguntar entonces cuál es la fuerza más adecuada para llevar el sistema al estado de reposo en un tiempo mínimo, acotando de algún modo la intensidad admisible de esas fuerzas.

En el presente trabajo se demuestra que si la acotación es exigir que las componentes de la fuerza, o sea los términos no homogéneos del sistema, sean menores o iguales a una constante k, la estrategia óptima es tomar una fuerza función del tiempo cuyas componentes tengan valor absoluto k. Esto si el sistema es tal que el estado de reposo es un punto de equilibrio estable. Si en cambio es inestable, se puede dar una cota para dicha constante k, con la cual se puede forzar el sistema hasta el estado de reposo.

Este trabajo es una generalización de una memoria reciente de Bellman-Glicksberg y Gross (Quart. Appl. Math. XIV, 1, 1956) que se refiere al mismo problema tratado para el caso de ecuaciones a coeficientes constantes.

O. VARSAVSKY, (Fac. de Ciencias Exactas, Univ. de Buenos Aires), *Funcionales positivas extendibles.*

Sea A un álgebra con involución, sin unidad, y φ una funcional lineal sobre A, que cumple:

$$\varphi(a \circ a^*) \leqq N$$

donde $a \circ b = a + b - ab$ y N es un número real. Entonces:

1) φ es positiva sobre $A: \varphi(a a^*) \geqq 0$, y por lo tanto hermitiana:

$$\varphi(a b^*) = \overline{\varphi(b a^*)}$$

2) $N < 0$ si $\varphi \neq 0$

3) $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$ y $|\varphi(a)|^2 \leqq N \varphi(a a^*)$ y por lo tanto φ es extendible a $A + 1$ sin dejar de ser positiva, mediante

$$\varphi(a + \lambda 1) = \varphi(a) + \lambda N$$

O. VARSAVSKY, (Fac. de Ciencias Exactas, Univ. de Buenos Aires), *Individuos en álgebras monádicas.*

Sea A un álgebra monádica, esto es, un álgebra de Boole con un operador existencial $\exists$ (un operador de clausura cuyo rango es subálgebra, ver P. Halmos, Comp. Math. 12, 217-249, 1956). En ella definimos como *individuos* a los endomorfismos α que cumplan además:

a) $\alpha \exists = \exists$, $\exists \alpha = \alpha$, y por lo tanto:

b) $\alpha a \leqq \exists a$ para todo $a \in A$

y resulta entonces (llamando m-ideales a los ideales cerrados con respecto a $\exists$ y anteponiendo siempre "m-" para indicar conceptos algebraicos usuales referidos a m-ideales):

1) Si I es un m-ideal, en el cociente A/I todo individuo tiene una imagen canónica bien definida, gracias a b), y no nula, por a).

2) Dados dos individuos diferentes en A, hay un m-ideal m-maximal M tal que en A/M las imágenes de aquellos son diferentes.

3) Si M es m-maximal, Halmos mostró que en A/M, representada (Stone) por funciones a dos valores sobre el espacio M de sus ideales maximales, la imagen del existencial $\exists$ es tomar supremos. Entonces, por a), el rango de todo individuo es el álgebra simple $\{0,1\}$ y por lo tanto su núcleo es un punto M:

En un álgebra monádica m-simple cada individuo es un ideal maximal y cada ideal maximal permite definir un individuo.

4) Es usual pedir que haya suficientes individuos para servir de "testigos" a todas las funciones, esto es, para cada $a \in A$ debe haber un α tal que $\alpha a = \exists a$. Si A es m-simple, esto equivale, por b) y el teorema de Stone, a que los individuos sean densos en M (en su topología canónica).

En el caso general, los m-ideales m-maximales M son subconjuntos M_M de M, cerrados, disjuntos y que cubren M. Cada M_M es homeomorfo al espacio de Stone del A/M respectivo.

Para cada individuo α sea K_α su núcleo, que es también un cerrado de M. Cada intersección $K_\alpha \cap M_M$ está formada por los ideales maximales de A que contienen a K_α y M, de los que hay por lo menos uno (y sólo uno si el rango de $\exists$ es un álgebra completa: A. Monteiro, comunicación a U.M.A., mayo 1956).

En resumen, para que haya suficientes testigos en todos los modelos, la unión de los núcleos de todos los individuos debe ser densa en M.