APLICACION DEL METODO DE LA TRANSFORMACION DE LAPLACE A LA EVALUACION DE CIERTAS INTEGRALES QUE CONTIENEN FUNCIONES TRASCENDENTES NO ELEMENTALES

por MARIO O. GONZALEZ
Universidad de La Habana

1. Si $L\{F(t)\}=f(s)$ y si $(s+\beta)^{\alpha+1} f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n$, en donde

$$u=\frac{s-\beta}{s+\beta} \quad \text{y} \quad s=\beta\frac{1+u}{1-u}$$

se sigue

$$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{1}{(s+\beta)^{\alpha+1}}\left(\frac{s-\beta}{s+\beta}\right)^n. \tag{1}$$

Puesto que

$$L\{t^\alpha L_n^{(\alpha)}(t)\}=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}\frac{1}{s^{\alpha+1}}\left(\frac{s-1}{s}\right)^n$$

se infiere fácilmente

$$L\{e^{-\beta t} t^\alpha L_n^{(\alpha)}(2\beta t)\}=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}\frac{1}{(s+\beta)^{\alpha+1}}\left(\frac{s-\beta}{s+\beta}\right)^n.$$

Por tanto, tomando las transformadas inversas en ambos miembros de (1), lo que aquí es legítimo, resulta

$$F(t)=e^{-\beta t} t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{n!}{\Gamma(\alpha+n+1)} L_n^{(\alpha)}(2\beta t). \tag{2}$$

Multiplicando ambos miembros de (2) por $e^{-\beta t} L_n^{(\alpha)}(2\beta t)$ integrando entre límites 0 y $+\infty$ y teniendo en cuenta la ortogonalidad de los polinomios generalizados de Laguerre en dicho intervalo, se obtiene

$$\int_0^\infty e^{-\beta t} F(t)\, L_n^{(\alpha)}(2\beta t)\, dt = \frac{c_n\, n!}{\Gamma(\alpha+n+1)} \int_0^\infty e^{-2\beta t} t^\alpha \left[L_n^{(\alpha)}(2\beta t)\right]^2 dt$$

$$= \frac{c_n}{(2\beta)^{\alpha+1}}. \qquad (3)$$

2. *Aplicaciones*. I. Tomemos $F(t) = e^{-\beta t} \operatorname{erf} \sqrt{at}$. Se sabe que la transformación de Laplace de esta función es

$$f(s) = \frac{\sqrt{a}}{(s+\beta)\sqrt{s+a+\beta}}$$

y resulta

$$(s+\beta)^{\alpha+1} = a^{1/2}(s+\beta)^\alpha (s+a+\beta)^{-1/2}$$

$$= a^{1/2}(2\beta)^\alpha (1-u)^{-\alpha} \left(\frac{2\beta}{1-u} + a\right)^{-1/2}$$

$$= a^{1/2}(2\beta)^\alpha (2\beta+a)^{-1/2} (1-u)^{-\alpha+1/2} \left(1 - \frac{a}{2\beta+a} u\right)^{-1/2}$$

$$= a^{1/2}(2\beta)^\alpha (2\beta+a)^{-1/2} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \binom{-\alpha+1/2}{u}$$

$$u^n \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \binom{-1/2}{n} \left(\frac{a}{2\beta+a}\right)^n u^n$$

$$= a^{1/2}(2\beta)^\alpha (2\beta+a)^{-1/2} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \left\{ \sum_{r=0}^n \binom{-\alpha+1/2}{n-r} \right.$$

$$\left. \binom{-1/2}{r} \left(\frac{a}{2\beta+a}\right)^r \right\} u^n.$$

Por tanto, haciendo $2\beta = b$ se obtiene la fórmula

$$\int_0^\infty e^{-bt} \operatorname{erf} \sqrt{a\,t}\, L_n^{(\alpha)}(b\,t)\,dt =$$

$$= a^{1/2}\, b^{-1}\,(a+b)^{-1/2}\,(-1)^n \sum_{r=0}^{n} \binom{-\alpha+1/2}{n-r}\binom{-1/2}{r}\left(\frac{a}{a+b}\right)^r .$$

Para $\alpha = 1/2$ se deduce, en particular,

$$\int_0^\infty e^{-bt} \operatorname{erf} \sqrt{a\,t}\, L_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(b\,t)\,dt = b^{-1}\,(-1)^n \binom{-1/2}{n}\left(\frac{a}{a+b}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Las fórmulas siguientes se obtienen análogamente, por aplicación de la fórmula (3).

II.

$$\int_0^\infty e^{-bt} J_0(2\sqrt{a\,t})\, L_n^{(\alpha)}(b\,t)\,dt = b^{-1}\, e^{-a/b} \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{n-r}}{r!}\binom{-\alpha}{n-r}\left(\frac{a}{b}\right)^r .$$

III.

$$\int_0^\infty e^{-bt} S_i(t)\, L_n^{(\alpha)}(b\,t)\,dt = b^{-1}\left\{(-1)^n \binom{-\alpha}{n} \cot^{-1} b - \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^{n-r}}{r(1+b^2)^{r/2}} \binom{-\alpha}{n-r} \operatorname{sen}(r \tan^{-1} b)\right\}.$$

IV.

$$\int_0^\infty e^{-bt}\left[1 - e^{-bt} e_k(b\,t)\right] L_n^{(k)}(2\,b\,t)\,dt = \begin{cases} 1/2^{k+1}\, b & (n=0) \\ (-1)^n/2^k\, b & 0<u) \end{cases}$$

V.

$$\int_0^\infty e^{-(a+b)t}\, \gamma[\nu, (a-b)\,t]\, L_n^{(\nu-1)}(2\,a\,t)\,dt =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\nu)(a-b)^\nu}{(a+b)(2a)^\nu} & (n=0) \\[2ex] (-1)^n \dfrac{\Gamma(\nu)}{(2a)^{\nu-1}} \quad \dfrac{(a-b)^{n+\nu-1}}{(a+b)^{n+1}} & (n>0. \end{cases}$$

3. Sea, como antes, $\mathrm{L}\{F(t)\}=f(s)$ y supongamos

$$\sqrt{1+s^2}\,f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}\,u^{2n+1}$$

en donde

$$u=\sqrt{1+s^2}-s \quad \text{y} \quad s=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}-u\right).$$

Se tiene

$$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}\frac{[\sqrt{1+s^2}-s]^{2n+1}}{\sqrt{1+s^2}}$$

y tomando transformadas inversas resulta

$$F(t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}\,J_{2n+1}(t).$$

Multiplicando ambos miembros por $t^{-1}J_{2n+1}(t)$ e integrando entre 0 y $+\infty$ se obtiene la fórmula

$$\int_0^{\infty} t^{-1}F(t)\,J_{2n+1}(t)\,dt=c_{2n+1}\int_0^{\infty} t^{-1}J^2{}_{2n+1}(t)\,dt=\frac{c_{2n+1}}{2(2n+1)}. \qquad (4)$$

4. *Aplicaciones*. I. Tomando $F(t)=Si(t)$ se tiene $f(s)=\frac{1}{s}$ $\tan^{-1}\frac{1}{s}$ y resulta

$$\sqrt{1+s^2}\,f(s)=\frac{\sqrt{1+s^2}}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}=\frac{1+u^2}{1-u^2}\tan^{-1}\frac{2u}{1-u^2}$$

$$=2\,\frac{1+u^2}{1-u^2}\tan^{-1}u=2\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}2\,u^{2n}\right].\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\,u^{2n+1}$$

$$\int_0^{\infty} t^{-1}\,Si(t)\,J_{2n+1}(t)\,dt=\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{(-1)^n}{2n+1}+2\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(-1)^r}{2n+1}\right\}.$$

II. Para $F(t) = 2\,t^{-1}(1 - \cos t)$ se obtiene, análogamente,

$$\int_0^\infty t^{-2}(1-\cos t)\,J_{2n+1}(t)\,dt = \begin{cases} \dfrac{1}{2(n+1)(2n+1)} & (n=2m) \\[2ex] \dfrac{1}{2n(2n+1)} & (n=2m+1). \end{cases}$$

BIBLIOGRAFIA

(1) DOETSCH, G., *Theorie und Anwendung der Laplace-transformation*, Dover, 1943.

(2) ERDÉLYI, Magnus, Oberhettinger, Tricomi: *Tables of Integral Transforms*, 2 vol., McGraw-Hill, 1954.

(3) SNEDDON, I. N., *Functional Analysis*, Handbuch der Physic, Band 2, Springer, 1955.

(4) VITALI-SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, vol. 2, Zanichelli, 1946.