DIVERSAS CARACTERIZACIONES DE LA CONTINUIDAD EN CIERTOS HOLOIDES

CARLOS ALBERTO INFANTOZZI
(Facultad de Humanidades y Ciencias. Inst. de Estudios Superiores)
Montevideo

Resumen

Sea $(G, +)$ un hemi-grupo (1) aditivo de más de un elemento. Si la ley de composición posee un elemento neutro derecho, o sea verifica la condición:

G_0) (neutro derecho). - Existe un único elemento $0 \varepsilon G$ tal que: $a+0=a$ para todo $a \varepsilon G$

y, además, se cumple la siguiente propiedad, que permite introducir el carácter holoidal:

G_n) (nulidad). - $a+b=0 \longrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$

se dirá que la estructura es un holoide *simple* (2).

El sistema G es linealmente-ordenable, y organizable como «semi-grupo» (3), si la operación cumple todava la siguiente propiedad:

G_d) (cuasi-grupo débil). - Si $a \neq b$, entonces existe un x tal que $a+x=b$, o un y tal que $b+y=a$. Si para un $x \neq 0$ es $x+a=b$, entonces existe un $y \neq 0$ tal que $a+y=b$.

Obsérvese que, aún cuando la estructura no llega a ser un «cuasi-grupo» (4), es posible probar la *unicidad* del x y el y

---

(1) DUBREIL, *Demi-groupe*.
(2) Sin conmutatividad. KLEIN-BARMEN exigen que sea abeliano y una condición que es consecuencia de la G_n).
(3) CHATELET.
(4) HAUSMANN-ORE.

que aparecen en G_d), valen las dos propiedades uniformes inversas (5) y hay compatibilidad (6) entre la operación y la relación «<» definida del modo usual (7).

Un holoide simple en el que se cumpla G_d) diremos que es *ordenable*.

Lo llamaremos *encadenado* si además verifica la siguiente condición:

G_e) (encadenamiento). - Si $a \varepsilon G$, $b \varepsilon G$ y $a < b$, para cada $\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon . \varepsilon . G$, existen elementos $a_i . \varepsilon . G$ $(0 \leqq i \leqq n(a, b, \varepsilon))$ tales que $a_0 = a$, $a_n = b$, $a_i < a_{i+1}$ y $a_{i+1} - a_i < \varepsilon$ para todo $i < n$ (8).

Se puede probar que todo holoide encadenado es *abeliano* (9).

La teoría de los holoides simples abelianos puede desarrollarse sobre la base de las propiedades del «hemi-grupo» más las G'_0). Existe un elemento $0 . \varepsilon G$ tal que $a + 0 = a$, cualquiera que sea a; G_n) y G_c). La de los holoides abelianos ordenables, sobre la base de las anteriores más la G'_d). Si $a \neq b$, entonces existe un x tal que $a + x = b$ o un y tal que $b + y = a$.

Un holoide se dice *continuo* cuando cumple la siguiente condición:

G_C) Toda cortadura *tiene* un *único* elemento de separación.

En los holoides ordenados se introduce el concepto de entorno y el de punto de acumulación del modo corriente, resultando así organizada una topología de espacio de Hausdorff. Si el holoide es encadenado, el espacio es de «carácter numerable» (10). Los conjuntos ordenadamente-densos (11) son los mismos que los que tienen una subclase mediana (12), y por lo tanto resultan acumulados. Los conjuntos conexos son ordenadamente-densos, y en éstos la condición necesaria y suficiente para que

(5) De regularidad, simplificación o cancelativas, resultando ser G un semigrupo.
(6) BOURBAKI.
(7) Por ejemplo con un sumando no nulo derecho.
(8) Las diferencias son derechas.
(9) Cumple la condición G_c). $a + b = b + a$. En lo que sigue no prescindiremos de la conmutatividad.
(10) 1er. axioma de numerabilidad de Hausdorff.
(11) SIERPINSKI.
(12) RUSSELL.

una sub-clase D sea mediana es que cada uno de sus puntos sea de acumulación de D.

Los holoides encadenados son espacios separables ([13]).

Por «holoide» separable se entiende el que tiene una sub-clase mediana numerable ([14]). Hay «holoides» separables no-encadenados.

Los holoides encadenados resultan espacios perfectamente-separables ([15]), tomando «distancias» pertenecientes al holoide separable, y, por lo tanto, son completamente normales ([16]), existiendo funcionales monótonas continuas no triviales definidas en todo el holoide([17]).

Se puede probar que sobre un holoide separable es posible construir una funcional continua monótona *estricta.*

Es claro que toda funcional continua —y, en particular, monótona estricta—, sobre un holoide continuo —y, por lo tanto separable—, tiene la propiedad de Darboux; pero esta propiedad, recíprocamente, permite caracterizar la continuidad porque puede probarse que un holoide separable H es continuo si cumple la siguiente condición:

I) Toda funcional continua monótona estricta sobre H, tiene la propiedad de Darboux.

Para los holoides H ordenables, simplemente, se puede probar la continuidad por medio de la propiedad:

II) H es conexo.

En los holoides H ordenables que carezcan de mínimo elemento no nulo, la continuidad puede caracterizarse de uno de los modos siguientes:

III) H tiene la propiedad de Borel ([18]) en toda parte acotada y cerrada.

IV) Todo conjunto parcial acotado de infinitos elementos distintos, tiene al menos un elemento de acumulación.

([13]) Fréchet.
([14]) No confundir con la noción de "espacio" separable.
([15]) Fréchet.
([16]) Tietze y Tychonoff.
([17]) Urysohn-Tietze.
([18]) Fréchet.

La continuidad de un holoide H encadenado se puede demostrar por medio de la siguiente propiedad:

V) H no está estrictamente contenido en otro holoide continuo.

En los holoides encadenados puede probarse que existen pares de clases contiguas, sucesiones fundamentales [19], pares de sucesiones monótonas convergentes, y su continuidad puede caracterizarse de una de las maneras siguientes:

a) Todo par de clases contiguas *tiene* elemento de separación.

b) Todo par de sucesiones monótonas convergentes *tiene* elemento de separación.

c) Toda sucesión fundamental *tiene* límite.

Caracterizaciones de la continuidad en los holoides ordenados sin mínimo elemento no-nulo [20] pueden hacerse por medio de una de las proposiciones siguientes:

d) Toda sucesión acotada tiene algún límite de oscilación.

e) Toda sucesión acotada tiene límite superior de oscilación [21].

f) Toda sucesión monótona creciente y acotada tiene extremo superior [22].

g) Todo conjunto no vacío acotado superiormente tiene extremo superior [23].

Hay muchas otras condiciones parecidas a las precedentes que permiten caracterizar la continuidad. En casos de holoides ordenables simplemente puede prescindirse de la condición G_m)

(19) Que cumplen la condición de Cauchy.
(20) Condición G_m). Si $\varepsilon \neq 0$ es elemento de G, existe un $\varepsilon' \neq 0$ perteneciente a G tal que $\varepsilon' < \varepsilon$.
(21) Id. para límite inferior de oscilación.
(22) Id. para decrecimiento monótono y extremo inferior.
(23) Id. para acotado inferiormente y extremo inferior.

agregando la *unicidad* del elemento fundamental que aparece en el postulado, o modificando ligeramente la *definición* del concepto clave que en él se encuentra (sucs. monóts. convs., límite-superior, extremo-superior, ...), o postulando, además, la *existencia* del mencionado concepto en el holoide (es decir: se supone existente un par de clases contiguas, o una sucesión monótona creciente y acotada, ... etc.).

Hay varias proposiciones equivalentes a la G_m), así como otras muy vinculadas a la de encadenamiento. La G_c) es deducible, además, de otras propiedades parecidas a las aquí indicadas sin necesidad de llegar a la de continuidad.

La continuidad ordinal (24) equivale a la dedekindiana y a la cantoriana (25).

Es claro que en los holoides continuos se verifican todas las propiedades anteriores.

Los holoides encadenados u ordenables abelianos son semigrupos y pueden inmergirse en grupos por el procedimiento corriente.

Las líneas anteriores implican una colección de caracterizaciones de la continuidad en tales estructuras.

Exposiciones directas del tema pueden lograrse adjuntando a una cualquiera de las diversas axiomáticas sobre grupos, algunas de las referentes a una relación de orden-lineal compatible con la ley de composición de la estructura, más las proposiciones aquí mencionadas para la continuidad.

Consideraciones semejantes pueden volver a hacerse en lo que sigue.

Se puede probar que todo holoide encadenado es parte de un holoide continuo, valiendo una proposición análoga para el caso de grupos.

Si a un holoide encadenado se le impone una condición de primitividad (26), se obtiene una estructura isomorfa del campo de los racionales $\geqq 0$. Es fácil lograr isomorfismos con otros

(24) CANTOR.
(25) RUSSELL.
(26) BLUMBERG.

campos numéricos notables (hasta el de los reales inclusive), obteniéndose varias fundamentaciones de la Aritmética.

Los isomorfismos entre holoides se pueden caracterizar de diversos modos.

Las clases-cociente de un sinnúmero de entidades matemáticas por una relación de equivalencia suelen ser holoides.

Las múltiples caracterizaciones de la continuidad para holoides permiten introducir de otras tantas maneras el concepto de continuidad en las fundamentaciones de la Geometría.

Pruebas de estos resultados y la bibliografa correspondiente, aparecerán en una publicación de la Universidad de la República.