CLASES CARACTERISTICAS GENERALIZADAS Y CUADRADOS DE STEENROD EN LA SUCESION DE GYSIN DE UN ESPACIO FIBRADO ESFERICAMENTE

por ROBERTO VÁZQUEZ
(Universidad Nacional de México e Instituto Nacional de la Investigación Científica)

I. *Introducción.*

El objeto de este trabajo es definir las clases características generalizadas (módulo 2) de un espacio fibrado (en el sentido de Serre) cuya fibra tiene la cohomología (mód. 2) de una esfera, e introducir los cuadrados de Steenrod en la sucesión de Gysin correspondiente. Los resultados obtenidos aquí tienen sus análogos en la teoría de Thom [4] para espacios fibrados localmente triviales, pero nuestra técnica es completamente diferente, técnica que emplea a los cuadrados de Steenrod en la sucesión espectral del espacio fibrado y no requiere que este sea necesariamente trivial en el sentido local.

Para mayor comodidad de la exposición se ha dividido este trabajo en dos partes, en la primera (N.º II) se mencionan los antecedentes del tema tratado y la segunda (N.º III) consta del trabajo propiamente dicho.

II. *Antecedentes.*

1. En la literatura matemática se da al concepto de *espacio fibrado* diversas acepciones. En este trabajo se considerarán únicamente las siguientes:

(a) Espacio fibrado localmente trivial y con grupo estructural operando en la fibra, en el sentido de [3].

(b) Espacio fibrado localmente trivial, en el sentido de [1], página 46.

(c) Espacio fibrado en el sentido de Serre [2].

Nota: Todo (a) es un (b) y todo (b) es un (c).

2. *Clases características de Whitney.*

Sea $\{E, p, B, F G\}$ un espacio fibrado del tipo (a) donde E es el espacio total, B la base, $p: E \longrightarrow B$ la aplicación fibrante, F la fibra y G el grupo estructural; supongamos que F sea una $(n-1)$-esfera y $G = 0_n = n$-grupo ortogonal. Si B es un complejo finito K se definen las clases caractersticas W_q del espacio fibrado como sigue:

Denotemos con K^q al q-esqueleto de K. En K^q es siempre posible definir un campo de vectores $(n-q)$-dimensionales, unitarios y ortogonales; si se quiere extender el campo a K^{q+1} aparece una obstrucción, a saber, el cociclo c^{q+1} cuyo valor en la $(q+1)$-célula σ es el elemento de $\pi_q(V_{n-q}{}^n)$, q-grupo de homotopía de la variedad de Stiefel $V_{n-q}{}^n$, determinado por el campo en la frontera $\dot{\sigma}$ de σ. La clase de cohomología de c^{q+1} es la clase característica $W_{q+1} \in H^{q+1}(K; \pi_q(V_{q-n}{}^n))$ (coeficientes locales) ([3]) y [7]).

3. *Las clases características generalizadas de Thom.*

Supongamos ahora que $\{E, p, B, F\}$ es un espacio fibrado del tipo (b) y en donde B es localmente compacto y paracompacto y F una $(n-1)$-esfera. Thom asocia al espacio fibrado anterior otros dos $\{A, p_1, B, \tilde{F}\}$, $\{A', p_1', B, \tilde{F}'\}$ donde $\tilde{F}$ es una n-bola cerrada, $\tilde{F}'$ una n-bola abierta y $A' \subset A$. En estas condiciones existe un isomorfismo canónico $\varphi^* : H^q(B, GOT) \approx H^{q+n}(A', T)$ donde G es un faisceau localmente simple de grupos abelianos y T es un sistema local de enteros asociado al espacio fibrado A' (sistema torcido de enteros). Cuando B es un complejo celular se puede dar una interpretación elemental de φ^* que se mencionará después. Si $\omega \in H^0(B, Z)$ es la clase unitaria y $U = \varphi^*(\omega)$ entonces Thom define las clases características generalizadas W_i por la relación: $\varphi^* W_i = Sq^i U$.

Como en el caso anterior W_i es módulo 2 para i par y es una clase entera torcida para i impar.

El resultado fundamental de [4] es: Si el espacio fibrado es como en el número 2 entonces las clases características generalizadas son las clases de Whitney.

4. *Los cuadrados de Steenrod en la cohomología singular cúbica.*

El producto-i (cup-i product) puede definirse así [5]: Si f y g son dos cocadenas módulo 2 del espacio X de grados p y q, respectivamente, entonces $f \underset{i}{\smile} g$ es la cocadena de grado $p+q-i$ cuyos valores se obtienen por la fórmula

$$(f \underset{i}{\smile} g)(c) = \sum_{(H,K)} f(\lambda_K{}^\beta c) \cdot g(\lambda_H{}^\alpha c) \qquad (0 \leqq i \leqq \text{mín}(p, q))$$

donde c es un $(p+q-i)$-cubo de X y la suma tiene un término para cada par ordenado (H, K) de subconjuntos de $\{1, \ldots, p+q-i\}$ siendo $H \cap K = \emptyset$, $\nu(H) = p-i$, $\nu(K) = q-i$ donde ν designa el número de elementos del conjunto; $\lambda_K{}^\beta c$ es la cara de c de grado p tal que $(\lambda_K{}^\beta c)(t_1, \ldots, t_p) = c(y_1, \ldots, y_{p+q-i})$ donde $0 \leqq t_i \leqq 1$, $y_k = \beta(k)$ si $k \in K$, $y_k = t\,\varphi_K(k)$ si $k \notin K$ siendo φ_K la función estrictamente creciente del complemento de K con valores en $\{1, \ldots, p+q-i\}$ y $\beta(k) = 0$ ó 1 según sea par o impar, respectivamente, el número $k - \nu[(H \cup K) \cap \{1, \ldots, k\}]$; la cara $\lambda_H{}^\alpha c$ se define análogamente con la única diferencia: $\alpha(k) = 0$ si $k - \nu[(H \cup K) \cap \{1, \ldots, k\}]$ es impar y $\alpha(k) = 1$ en el caso contrario.

Si $i > \text{mín}(p, q)$ o $i < 0$ se define $f \underset{i}{\smile} g = 0$.

La fórmula anterior implica que la cofrontera de $f \underset{i}{\smile} g$ es:

$$d(f \underset{i}{\smile} g) = df \underset{i}{\smile} g + f \underset{i}{\smile} dg + f \underset{i-1}{\smile} g + g \underset{i-1}{\smile} df.$$

En particular si $f = g = p$-cociclo de X entonces $f \underset{i}{\smile} f$ es un $(2p-i)$-cociclo y el cuadrado Sq_i de la clase de cohomología $\{f\}$ de f se define así:

$$Sq_i\{f\} = \{f \underset{i}{\smile} f\}.$$

5. *La sucesión espectral de cohomología de un espacio fibrado y los cuadrados de Steenrod.*

Sea $\{E, p, B\}$ un espacio fibrado del tipo (c); tomemos un punto fijo $b \in B$ de donde $F = p^{-1}(b)$ es la fibra sobre b y sea e un punto fijo de F; se supondrá en lo que sigue que F y B son espacios arcoconectados, lo que implica que E es del mismo estilo, entonces la homología de dichos espacios puede calcularse empleando únicamente cubos cuyos vértices están en b o en e según el caso.

Sea A el grupo de cocadenas cúbicas de E con valores en el grupo abeliano G. Se define ([2]) una filtración decreciente $A = A^0 \supset A^1 \supset \ldots \supset A^p \supset \ldots$ donde A^p es el subgrupo de A de las cocadenas que se anulan en los cubos de filtración $\leqq p-1$. Si ${}^sA$ denota a los elementos homogéneos de grado s de A se definen los grupos:

$$C_r^{p,q} = {}^{p+q}A \cap A^p \cap d^{-1} A^{p+r}; \quad B_r^{p,q} = {}^{p+q}A \cap A^p \cap dA^{p-r};$$

$$(0 \leqq r \leqq \infty).$$

$$E_r^{p,q} = C_r^{p,q} / (C_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q}); \quad E_r = \sum_{p,q} E_r^{p,q}$$

A la sucesión $\{E_r\}$ se le llama la sucesión espectral de cohomología, con coeficientes en G, del espacio fibrado $\{E, p, B\}$. La diferencial d en A induce una diferencial d_r en E_r que aplica $E_r^{p,q}$ en $E_r^{p+r,q-r+1}$ y se tiene $H(E_r) = E_{r+1}$. Según [2] se pueden describir los primeros términos de la sucesión espectral como sigue:

$E_0^{p,q}$ es isomorfo al grupo de funciones con valores en G y definidas en los cubos de E de grado $p+q$ y filtración $\leqq p$, que se anulan en los cubos degenerados y en los de filtración $\leqq p-1$.

$E_1^{p,q}$ es canónicamente isomorfo a $C^p(B, H^q(F, G)) = p$-grupo de cocadenas de B con grupo de coeficientes $H^q(F, G)$.

$E_2^{p,q}$ es canónicamente isomorfo a $H^p(B, H^q(F, G)) = p$-grupo de cohomología de B con valores en el sistema local definido en B por $H^q(F, G)$.

Supongamos de aquí en adelante que $G = Z_2$. En [6] se demuestra que los productos-i en E inducen ciertos homomorfismos en los términos de la sucesión espectral, a saber:

Sea f un elemento homogéneo de A y definamos

$$\Phi_i(f) = f \underset{i}{\smile} f + f \underset{i+1}{\smile} df \quad (i \geqq -1)$$

entonces Φ_i induce homomorfismos $(r \geqq 2)$:

$$\overline{\Phi}_i : E_r^{p,q} \longrightarrow E_s^{2p-i,2q} \quad (i \leqq p, \;\; r \leqq s \leqq 2r-1)$$

$$\overline{\Phi}_i' : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p,2q-(i-p)} \quad (i \geqq p).$$

Si se identifica $E_2^{p,q}$ con $H^p(B, H^q(F, Z_2))$ y el sistema local en B constituído por $H^*(F, Z_2)$ es simple, entonces

$$\overline{\Phi}_i : H^p(B, H^q(F, Z_2)) \longrightarrow H^{2p-i}(B, H^{2q}(F, Z_2)) \quad (i \leqq p)$$

es el cuadrado Sq_i utilizando como apareamiento de $H^q(F, Z_2)$ consigo mismo al «cup-product», y

$$\overline{\Phi}_i' : H^p(B, H^q(F, Z_2) \longrightarrow H^p(B, H^{2q-(i-p)}(F, Z_2)) \quad (i \geqq p)$$

es el homomorfismo inducido en la cohomología de B por el cuadrado Sq_{i-p} en la fibra F.

III. *Clases características generalizadas módulo 2 y cuadrados de Steenrod en la sucesión de Gysin.*

Sea $\{E, p, B\}$ un espacio fibrado del tipo (c) cuya fibra $F = p^{-1}(b)$ tiene la cohomología sobre Z_2 igual a la de una $(n-1)$-esfera, entonces el sistema local definido en B por $H^*(F)$ es simple. En la sucesión espectral se tienen isomorfismos canónicos para toda q:

$$(1) \quad \begin{aligned} &H^q(B) \approx H^q(B) \square H^{n-1}(F) \approx E_2^{q,n-1} \approx E_n^{q,n-1}, \\ &H^q(B) \approx E_2^{q,0} \approx \ldots \approx E_n^{q,0}. \end{aligned}$$

Sea u el generador de $E_n^{0,n-1}$ y $v \in H^n(B)$ tal que $p^* v = d_n u$. Todo elemento de $E_n^{q,n-1}$ puede expresarse de un modo único en la forma $p^* x \smile u$ donde $x \in H^q(B)$; se tiene $d_{n+1}(p^* x \smile p^* v = p^*(x \smile u) = p^* u \smile v)$ donde $d_{n+1} : E_n{}^{q,n-1} \longrightarrow E_n{}^{q+n,0}$. Por otra parte $E_n{}^{q,n-1}$ no tiene elementos frontera distintos de cero entonces $E_{n+1}{}^{q,n-1}$ es el conjunto de ciclos de $E_n{}^{q,n-1}$ y, además, $E_{n+1}{}^{q,n-1} = E_\infty{}^{q,n-1}$ de donde $E_\infty{}^{q,n-1} \approx \{x \in H^q(B) \mid x \smile v = 0\}$. Sea K^q el submódulo de $H^q(B)$ anterior. Si se compone la proyección natural $H^{q+n-1}(E) \longrightarrow E_\infty{}^{q,n-1}$ con el isomorfismo anterior se obtiene un homomorfismo

$$\psi : H^{q+n-1}(E) \longrightarrow H^q(B)$$

cuya imagen es K^q y cuyo núcleo es el mismo que el de $H^{q+n-1}(E) \longrightarrow E^{q,n-1}$ y este último es igual a la imagen de $p^* : H^{q+n-1}(B) \longrightarrow H^{q+n-1}(E)$.

Si definimos el homomorfismo

$$\beta : H^q(B) \longrightarrow H^{q+n}(B)$$

como el resultado de la multiplicación por v, esto es, $\beta x = x \smile v$, se obtiene la sucesión exacta

$$(2) \qquad \ldots \xrightarrow{\beta} H^{q+n-1}(B) \xrightarrow{p^*} H^{q+n-1}(E) \xrightarrow{\Psi} H^q(B) \xrightarrow{\beta} H^{q+n}(B) \xrightarrow{p^*} \ldots$$

que recibe el nombre de sucesión de Gysin del espacio $\{E, p, B\}$.

Los cuadrados $\overline{\phi}_i$ y $\overline{\phi}_i'$ (II-5) en la sucesión espectral son nulos con excepción de $\overline{\phi}_i$ para $q = 0$ y $\overline{\phi}'_{p+q}$, sin embargo las operaciones $\overline{\phi}_i$ en cocadenas inducen ahora otros homomorfismos como se ve a continuación:

Se demuestra en [6] que si $i \leqq q$ y $f \in C_n{}^{q,n-1}$ entonces $\phi_i(f) \in C_{2n-1}{}^{2q-i,2(n-1)}$, pero debido a que la fibra es una $(n-1)$-esfera se tiene $C_{2n-1}{}^{2q-i,2(n-1)} = C_n{}^{2q-i+n-1,n-1} + B_1{}^{2q-i,2(n-1)}$; se comprueba fácilmente que para $f, g \in C_n{}^{q,n-1}$:

$$\phi_i(f+g) - [\phi_i(f) + \phi_i(g)] \in C_1{}^{2(q+n-1)-i,0} + B_1{}^{2q-i,2(n-1)}.$$

Entonces ϕ_i induce un homomorfismo

$$C_n{}^{q,n-1} \longrightarrow (C_n{}^{2q-i+n-1,n-1} + B_1{}^{2q-i,2(n-1)}) / (C_1{}^{2(q+n-1)-i,0} + B_1{}^{2q-i,2(n-1)}) = E_n{}^{2q-i+n-1,n-1}.$$

También se comprueba sin dificultad que $\phi_i(C_{n-1}{}^{q+1,n-2} + B_{n-1}{}^{q,n-1}) \subset C_1{}^{2(q+n-1)-i,0} + B_1{}^{2q-i,2(n-1)}$ entonces ϕ_i induce un homomorfismo Γ_i de $E_n{}^{q,n-1}$ en $E_n{}^{2q-i+n-1,n-1}$ que satisface la regla de conmutatividad siguiente: $d_n \Gamma_i = \overline{\phi}_{i+1} d_n$. Para $i > q$ la situación es análoga de donde se tiene el

3. *Lema: Las operaciones* ϕ_i *inducen homomorfismos*

$$\Gamma_i : E_n{}^{q,n-1} \longrightarrow E_n{}^{2q-i+n-1,n-1} \qquad (i \geqq -1)$$

tales que $d_n \Gamma_i = \underline{\phi}_{i+1} d_n$.

Por lo anterior Γ_i induce un homomorfismo $\Gamma_i{}^*$ de $E_\infty{}^{q,n-1}$ en $E_\infty{}^{2q-i+n-1,n-1}$ y se deduce el

4. *Corolario: Es conmutativo el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} H^{q+n-1}(E) & \xrightarrow{\Psi} & K^q \\ Sq_i \downarrow & & \downarrow \Gamma_i{}^* \\ H^{2(q+n-1)-i}(E) & \xrightarrow{\Psi} & K^{2q-i+n-1}. \end{array}$$

Si se usa la notación superior $Sq^i = Sq_{q+n-1-i}$, $\Gamma^{*i} = \Gamma^*{}_{q+n-1-i}$ entonces el diagrama anterior se convierte en

$$\begin{array}{ccc} H^{q+n-1}(E) & \xrightarrow{\Psi} & K^q \\ Sq^i \downarrow & & \downarrow \Gamma^{*i} \\ H^{q+n-1+i}(E) & \xrightarrow{\Psi} & K^{q+i}. \end{array} \tag{4'}$$

Al considerar $\Gamma^i : E_n{}^{0,n-1} \longrightarrow E_n{}^{i,n-1}$ resulta $\Gamma^i(u)$ de la forma $p^* W^i \smile u$ donde $W_i \in H^i(B)$ y es $W_0 = 1$, $W_n = v$, $W_i = 0$ para $i > n$.

5. *Definición: Los elementos* W_i, $0 \leqq i \leqq n$, *son las clases caracterśticas generalizadas del espacio fibrado* $\{E, p, B\}$.

Sea $p^* x \smile u \in E_n{}^{q,n-1}$; aplicando la fórmula de Cartan se deduce

$$\Gamma^i(p^* x \smile u) = \sum_j p^* Sq^j x \smile \Gamma^{i-j}(u) = p^* (\sum_j Sq^j x \smile W_{i-j}) \quad u,$$

por consiguiente si $x \in K^q$ se obtiene

$$\Gamma^{*i} x = \sum_j Sq^j x \smile W_{i-j}.$$

Este resultado sugiere la

6. *Definición:* El *homomorfismo* $\vartheta^i : H^q(B) \longrightarrow H^{q+i}(B)$ *está definido por la condición* $\vartheta^i x = \sum_j Sq^i x \smile W_{i-j}$.

Ya que $d_n \Gamma^i(u) = Sq^i d_n u$, es $p^* W_i \smile p^* v = Sq^i p^* v$ o, lo que es es lo mismo, $Sq^i v = W_i \smile v$, por la tanto $\beta \vartheta^i = Sq^i \beta$. Así pues se tiene el

7. *Teorema: Es conmutativo el diagrama*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots \xrightarrow{\beta} & H^{q+n-1}(B) & \xrightarrow{p^*} & H^{q+n-1}(E) & \xrightarrow{\Psi} & H^q(B) & \xrightarrow{\beta} & H^{q+n}(B) & \xrightarrow{p^*} \dots \\
& Sq^i \downarrow & & Sq^i \downarrow & & \vartheta^i \downarrow & & Sq^i \downarrow & \\
\dots \xrightarrow{\beta} & H^{q+n+i-1}(B) & \xrightarrow{p^*} & H^{q+n+i-1}(E) & \xrightarrow{\Psi} & H^{q+i}(B) & \xrightarrow{\beta} & H^{q+n+i}(B) & \xrightarrow{p^*} \dots
\end{array}$$

8. *Comparación con la teoría de Thom.*

Para comparar las dos definiciones de clases características, módulo 2, es necesario suponer que el espacio fibrado es del tipo (b) y que los espacios considerados pertenecen a una categoría en la cual las dos teorías de cohomología coincidan, por ejemplo la categoría de complejos celulares. En tales circunstancias podemos describir el isomorfismo φ^* mencionado en II, 3 en los términos siguientes:

Sea $\{A, p_1, B\}$ el espacio fibrado (localmente trivial cuya fibra es una n-bola cerrada). Si i es la inclusión de E en A entonces $p = p_1 i$. Designemos con $u' \in C_n^{0,n-1}$ a un representante de la clase u en $E_n^{0,n-1}$ y sean $u_1 \in C^{n-1}(A)$, $v' \in Z^n(B)$ tales que $i^{\#} u_1 = u'$, $p_1^{\#} v' = du'$, por lo tanto $U' = p_1^{\#} v' + du_1$ es un n-cociclo de A módulo E; pongamos $U = \{U'\} \in H^n(C, E)$. Si $x \in H^q(B)$ y x' es un cociclo representante resulta

$$p_1^{\#} x' \smile U' \in Z^{q+n}(A, E).$$

Definimos

$$\varphi^* x = \{p_1^{\#} x' \smile U'\}. \tag{8.1}$$

En particular se obtiene $\varphi^* \omega = U$ donde ω es la clase unitaria en $H^0(B)$.

Ahora demostraremos que $Sq^i U = \varphi^* W_i$ para las W_i definidas en III, 5 con lo que quedará demostrada la equivalencia de las dos definiciones en las circunstancias mencionadas al principio de este párrafo. Para el efecto calculemos

$$Sq^i U = \{U' \underset{n-i}{\smile} U'\} ;$$

se deduce sin dicultad

$$(8.2) \qquad Sq^i U = \{p_1{}^{\#}(v' \underset{n-i}{\smile} v') + d\,\phi_{n-i-1}(u_1)\} .$$

Pero de la definición III, 5 se desprende

$$(8.3) \qquad \phi_{n-i-1}(u') = p^{\#}\, W_i' \smile u' + p^{\#}\, \alpha_i,$$

donde W_i' es un cociclo en W_i y $\alpha_i \in C^{n+i-1}(B)$.

Difenciando (8.3) se obtiene

$$p^{\#}(W_i \smile v') + p^{\#} \mathrm{d}\, \alpha_i = p^{\#}\, (v' \underset{n-i}{\smile} v'),$$

por lo tanto

$$(8.\ 4) \qquad p_1{}^{\#}\, (W_i' \smile v') + p_1{}^{\#}\, d\, \alpha_i + p_1{}^{\#}(v' \underset{n-i}{\smile} v') \in C^{n+i}(A, E).$$

De (8. 3) se deduce

$$\phi_{n-i-1}(u_1) + p_1{}^{\#}\, W_i' \smile u_1 + p_1{}^{\#}\, \alpha_i \in C^{n+i-1}(A, E)$$

y diferenciando resulta

$$(8.5) \qquad \mathrm{d}\, \phi_{n-i-1}(u_1) + p_1{}^{\#}\, W_i' \smile du_1 + p_1{}^{\#}\, d\, \alpha_i \in B^{n+i}(A, E).$$

Sumando (8. 4) y (8. 5) se obtiene

$$p_1{}^{\#}\, (v' \underset{n-i}{\smile} v') + d\, \phi_{n-i-1}(u_1) \sim p_1{}^{\#}\, W_i' \smile U'$$

mód. E y por consiguiente $Sq^i U = \varphi^* W_i$.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. J. HILTON, *An introduction to homotopy theory*, Cambridge University Press.

[2] J. P. SERRE, *Homologie des espaces fibrés*, Annals of Mathematics, (1951) 54 p. 425-505.

[3] N. STEENROD, *The topology of fibre bundles*, Princenton University Press.

[4] R. THOM, *Espaces fibrés en spheres et carrés de Steenrod*, Annales scientifiques de L'Ecole Normale Supérieure (1952), p. 109-181.

[5] R. VÁZQUEZ, *Los productos-i de cocadenas en la teoría singular cúbica*, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana (1954), XI, p. 9-32.

[6] — — *Nota sobre los cuadrados de Steenrod en la sucesión espectral de un espacio fibrado*, Ibid, (1957) p. 1-8.

[7] H. WHITNEY, *On the topology of diferentiable maniofolds*, Lectures in Topology, Michigan University (1941) p. 101-141.