RELACIONES ENTRE DERIVADAS GENERALIZADAS

por V. PEREYRA [1]

SUMMARY:

We define Riemann derivatives in Cèsaro means of a measurable function and we prove that the existence of finite Riemann-Cèsaro derivative in a measurable set E implies the existence of ordinary Riemann derivative, almost everywhere in E.

An interesting consequence is a generalization of a Khintchine theorem which says that the existence of Schwartz derivative of the indefinite integral of a function $f(x)$ implies the existence of Borel simmetric derivative of $f(x)$.

Marcinkiewicz y Zygmund han probado el siguiente teorema [1]:

Sea $f(x)$ una función de una variable real, definida y medible en un intervalo (a, b), E un conjunto de medida positiva contenido en (a, b) y k un número natural.

Si para cada punto x perteneciente a E:

$$\frac{{}^{(s)}\Delta_h^k f(x)}{h^k} = 0(1) \quad (h \rightarrow 0)$$

entonces existe pp en E la derivada de Peano de orden k de la función $f(x)$.

Será útil recordar algunas definiciones [2].

La diferencia simétrica de orden k de la función $f(x)$ es:

$${}^{(s)}\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} f\left(x + \left(i - \frac{k}{2}\right) h\right)$$

(1) Este tema fue sugerido por el Prof. A. Zygmund en su estadía en Bs. As. como experto de la Unesco en el Centro Regional de Matemática para América Latina.

Definición 1:

Cuando existe el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{{}^{(s)}\Delta_h{}^k f(x)}{h^k} = R^k f(x)$$ se le llama derivada de Riemann

de orden k de la función $f(x)$. Para $k=1$ coincide con la derivada simétrica y para $k=2$ con la de Schwartz.

Definición 2:

Si existe el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{k\,!}{h^k} \left[f(x+h) - f(x) - f_1(x)\,h - \ldots - f_{(k-1)}(x) \frac{h^{(k-1)}}{(k-1)\,!} \right] = f_{(k)}(x)$$

se le llama derivada de Peano de orden k de la función $f(x)$.

Las funciones $f_{(i)}(x)$ $(i=1,2,\ldots,k-1)$ son arbitrarias, a priori, pero quedan unívocamente definidas por $f_{(k)}(x)$.

Definición 1':

Sea $f(x)$ una función medible. Si existe el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{r}{h^r} \int_0^h (h-u)^{r-1} \frac{{}^{(s)}\Delta_u{}^k f(x)}{u^k}\,du = R^{(k)}\,C^{(r)} f(x) \qquad (r \text{ natural})$$

se le llama derivada de Riemann de orden k en media Cèsaro-r, o abreviadamente: Riemann-Cèsaro-r de orden k.

Se trata aquí de probar el siguiente:

Teorema 1:

Sea $f(x)$ una función medible y k, r dos números naturales. Supongamos que $\dfrac{{}^{(s)}\Delta_u{}^k f(x)}{u^k}$ es integrable en un entorno de $u=0$.

En casi todo punto en que existe derivada de Riemann-Césaro-r de orden k y es finita, existe derivada ordinaria de Riemann de orden k de $f(x)$ y ambas coinciden; es decir:

$$R^{(k)} C^{(r)} f(x) = R^{(k)} f(x) \qquad (p\,p)$$

Lema 1:

Si $A_p = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} (k-2j)^p$ k natural, p natural

entonces:

$$A_p = 0 \text{ para } p < k$$

$$A_k = (-1)^k 2^k k!$$

Demostración:

$$x^{-k} (1-x^2)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} x^{k-2j}$$

Derivando p veces y multiplicando cada vez por x:

$$(x D)^p [x^{-k} (1-x^2)^k] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (k-2j)^p (-1)^{k-j} x^{k-2j}$$

y de aquí se obtiene el resultado con $x=1$.

Lema 2:

Sea $f(u)$ una función medible y k, r dos números naturales. Si $g(u) = \dfrac{f(u)}{u^k}$ es integrable en un entorno de $u=0$ valen las identidades:

$$(1) \quad \int_0^h (h-u)^{r-1} g(u)\, du = (r-1)! \left[\frac{F^{(r)}(h)}{h^k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{r-1} \binom{r}{i} \binom{k+i-1}{k-1} i \int_0^h (h-u)^{i-1} \frac{F^{(r)}(u)}{u^{k+1}} du \right]$$

$$(2) \quad \int_0^h (h-u)^{r-1} f(u)\, du = (r-1)! \Big[G^{(r)}(h)\, h^k + \\ + \sum_{i=1}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} \binom{k}{i}\, i \int_0^h (h-u)^{i-1} G^{(r)}(u)\, u^{k-i}\, du \Big]$$

donde $F^{(r)}(h) = \dfrac{1}{(r-1)!} \displaystyle\int_0^h (h-u)^{r-1} f(u)\, du$ y $G^{(r)}$ similarmente.

Demostración:

Basta integrar repetidas veces por partes usando la identidad

$$\int_0^h (h-u)^{r-1} f(u)\, du =$$

$$= (r-1)! \int_0^h (\ldots (\int_0^{x_1} f(u)\, du)\, d x_1) \ldots d x_{r-1})$$

Lema 3:

$$(3) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{r}{h^r} \int_0^h (h-u)^{r-1} \frac{f(u)}{u^k}\, du$$

$$(4) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{r \binom{k+r}{r}}{h^{k+r}} \int_0^h (h-u)^{r-1} f(u)\, du$$

Con las mismas hipótesis del Lema 2, la existencia de uno qualquiera de estos límites implica la existencia del otro y ambos son iguales.

Demostración:

Es suficiente considerar el caso en que el límite es cero. Supongamos entonces que el límite (4) es cero. Usando la fórmula (1) del Lema 2 y la hipótesis, se tiene que:

$$\frac{1}{h^r}\int_0^h (h-u)^{r-1}\, g(u)\, du \underset{h\to 0}{\to} 0$$

La recíproca resulta de la fórmula (2).

Con estos elementos se puede pasar a la demostración del Teorema 1. Por hipótesis existe:

$$R^{(k)}\, C^{(r)} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{r}{h^r}\int_0^h (h-u)^{r-1} \frac{{}^{(s)}\Delta_u^k f(x)}{u^k}\, du$$

y por el Lema 3:

$$R^{(k)}\, C^{(r)} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{r\binom{k+r}{r}}{h^{k+r}}\int_0^h (h-u)^{r-1}\, {}^{(s)}\Delta_u^k f(x)\, du$$

Llamando $\delta(h)$ a la expresión bajo el signo de lím y operando:

$$\delta(h) = \frac{r\,!\binom{k+r}{r}}{h^{k+r}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \left[\left(i-\frac{k}{2}\right)^{-r} F^{(r)}\left(x+\left(i-\frac{k}{2}\right)h\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{r} \left(i-\frac{k}{2}\right)^{-j} F^{(j)}(x) \frac{h^{r-j}}{\overline{r-j}\,!}\right]$$

De aquí en adelante se supone que k es impar (²).

A partir de la expresión de $\delta(h)$ construiremos por cambios en la variable h, $(k+r+1)$ fórmulas iguales en el límite.

Reemplazando entonces h por $-\frac{2}{k}\left[s-\frac{k+r}{2}\right]h$ para $s=0, 1 \ldots k+r$, se tiene:

$$\delta_s(h) = \frac{(k+r)\,!}{k\,!\left[\frac{h}{k}(k+r-2s)\right]^{k+r}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} (A-B)$$

(²) El caso par tiene un tratamiento similar.

donde:

$$A = \left(i - \frac{k}{2}\right)^{-r} F^{(r)} \left[x + \left(s - \frac{k+r}{2}\right) \left(1 - \frac{2i}{k}\right) h \right]$$

$$B = \sum_{j=1}^{r} \left(i - \frac{k}{2}\right)^{-j} \frac{\left[\frac{1}{k} (k + r - 2s) h \right]^{r-j}}{(r-j)\,!} F^{(j)}(x)$$

Lo que se desea conseguir es una cierta combinación lineal de los $\delta_s(h)$ que converja a un múltiplo de $R^{(k+r)} F^{(r)}(x)$.

Esta combinación lineal es:

$$N(h) = \sum_{j=0}^{k+r} \frac{(-1)^s k\,! \left[\frac{1}{k} (k + r - 2s) \right]^{k+s} (k/2)^r}{s\,!\,(k + r - s)\,!} \delta_s(h) \tag{5}$$

Invirtiendo el orden de las sumas:

$$N(h) = \frac{(-1)^k \left(-\frac{k}{2}\right)^r}{h^{k+r}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \sum_{s=0}^{k+r}$$

$$\binom{k+r}{s} (-1)^{k+r-s} \left(A - \left(i - \frac{k}{2}\right)^r B\right)$$

pero por el Lema 1:

$$\sum_{s=0}^{k+r} \binom{k+r}{s} (-1)^{k+r-s} \left(i - \frac{k}{2}\right)^r B = \sum_{j=1}^{r} \frac{F^{(j)}(x) \left[\left(i - \frac{k}{2}\right) h\right]^{r-j}}{(r-j)\,!\, k^{r-j}}$$

$$\sum_{s=0}^{k+r} \binom{k+r}{s} (-1)^{k+r-s} (k + r - 2s)^{r-j} = 0$$

para cada $0 \leqq i \leqq k$.

Por lo tanto:

$$N(h) = (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \left(1 - \frac{2i}{k}\right)^k \sum_{s=0}^{k+r} \binom{k+r}{s}$$

$$(-1)^{k+r-s} \frac{F^{(r)} \left[x + \left(s - \frac{k+r}{2}\right) \left(1 - \frac{2i}{k}\right) h \right]}{\left[\left(1 - \frac{2i}{k}\right) h \right]^{k+r}}$$

Como se ve, la segunda suma tiene como límite para h tendiendo a cero y cualquiera sea $0 \leqq i \leqq k$: $R^{(k+r)} F^{(r)}$ en el punto x. De otra manera:

$$N(h) \underset{h \to 0}{\to} (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \left(1 - \frac{2i}{k}\right)^k (R^{(k+r)} F^{(r)}(x))$$

Pero por (5) también:

$$N(h) \underset{h \to 0}{\to} \frac{k!\,(-1)^{k+r}}{(k+r)!\,2^r k^k} \sum_{s=0}^{k+r} (k+r-2s)^{k+r} \binom{k+r}{s}$$

$$(-1)^{k+r-s} (R^{(k)} C^{(r)} f(x))$$

El Lema 1 afirma que los coeficientes de estas expresiones son iguales, de donde se deduce que existe derivada ordinaria de Riemann de orden $(k+r)$ de la r-ésima integral indefinida de $f(x)$.

Esto implica por el teorema de Marcinkiewicz y Zygmund que existe la derivada de Peano correspondiente, pero por el teorema de derivación de Lebesgue $F^{(r)}(x)$ es r veces derivable y se tiene:

$$D^r(F^{(r)}(x)) = f(x) \quad (pp \text{ en } E)$$

por lo tanto:

$$R^{(k+r)} F^{(r)}(x) = P_{(k+r)} F^{(r)}(x) = f_{(k)}(x) \quad (pp \text{ en } E)$$

y como la existencia de derivada de Peano implica la existencia de derivada de Riemann, esto completa la demostración del Teorema 1.

Teorema 2:

Sea $f(x)$ una función integrable en (a, b). Si existe la derivada de Riemann de orden $(k+r)$ de $F^{(r)}(x)$ en un conjunto E de medida positiva, entonces pp en E existe la derivada de Riemann-Cèsaro-r de orden k de $f(x)$.

Demostración:

Está contenida esencialmente en la del Teorema precedente.

Este Teorema generaliza uno de Khintchine [3] que dice lo mismo para el caso $k=1$, $r=1$.

B I B L I O G R A F I A

[1] A. ZYGMUND, *Trigonometrics Series.* Cambridge at Univ. Press, 2 Ed. Vol. 2.

[2] J. MARCINKIEWICZ y A. ZYGMUND, *On the differentiability of functions and summability of trigonometrical series.* Fundamenta Mathematicae, 26 (1936).

[3] A. KHINTCHINE, *Recherches sur la structure des functions mesurables.* Fundamenta Mathematicae, 9 (1927).

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CRONICA

ASAMBLEA DE LOS SOCIOS DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

El día 22 de setiembre de 1961, siendo las 15 horas y 30 minutos, se reunieron en el Aula nº 5 de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, Perú 222, los siguientes socios de la Unión Matemática Argentina, constituidos en Asamblea General ordinaria: R. Carranza, A. González Domínguez, M. Cotlar, J. Babini, R. Luccioni, C. Ballester, E. Quastler, H. Porta, N. Riviere, H. Fattorini, N. Karanowich, L. A. Santaló, E. Machado, C. Ratto de Sadosky, C. Sadosky, C. Loiseau, P. Baldaccini, D. M. Dragone, G. Klimovsky, E. Oklander, M. Gutiérrez Burzaco, O. Villamayor, G. Oliver, A. Korn, E. Zarantonello, A. Monteiro, B. Margolis, N. Fava, F. Toranzos (h.), L. Iglesias, O. Capri, W. Keller.

Abierta la sesión el Presidente Ing. J. Babini presentó un panorama de las actividades más sobresalientes de la sociedad durante el último período, a saber:

a) Revista. La Revista de la Unión Matemática Argentina, y de la Asociación Física Argentina, ha podido ir saliendo gracias a la ayuda del Consejo Nacional de Investigaciones y de la Facultad, pues el elevado precio de impresión no puede solventarse con las solas entradas de los socios. El volumen actualmente en prensa corresponde a las reuniones matemáticas realizadas el