VALORES NUMERICOS DE CIERTAS CONSTANTES RELACIONADAS CON VOLUMENES MIXTOS DE CUERPOS CONVEXOS

por R. E. ALEMANY

RESUMEN: En [1], Fáry ha demostrado las fórmulas II y III del texto, sin calcular las constantes α_k^{ij}, β^{ij}, que aparecen en el segundo miembro. En esta nota se obtienen las valores de estas constantes y se hacen algunas aplicaciones.

Según Fáry [1], se tienen las definiciones y resultados siguientes:

Sea R^n el espacio euclídeo n-dimensional; C, la familia de los conjuntos compactos convexos de R^n. Un "cuerpo convexo" es cualquier conjunto compacto convexo, y será "propio" si contiene puntos interiores de R^n.

Entonces: una "funcional φ sobre cuerpos convexos", es una función continua:

$$\varphi : \; C \rightarrow R \qquad (\varphi. \text{ continua})$$

definida para todo cuerpo convexo, y con valores en los reales R.

Dicha funcional será:

1) "Aditiva", si se cumple:

$$\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B) \qquad A,\ B,\ A \cup B \in C$$

2) "Invariante por traslaciones", si dada $t : R^n \rightarrow R^n$, definida por $t(x) = x + x_0$, es:

$$\varphi(tA) = \varphi(A) \qquad A \in C$$

3) "Invariante bajo isometrías" $g : R^n \rightarrow R^n$, cuando:

$$\varphi(gA) = \varphi(A) \qquad A \varepsilon C.$$

En particular: los volúmenes mixtos $V_k(A, U)$, con U dado, fijo, son funcionales sobre convexos que cumplen 1) y 2), pero no en general 3); se cumple 3) si $U = B^n =$ esfera de radio unidad, y se tiene el conocido teorema: [6, p. 221].

"Toda funcional continua, aditiva, definida para todo cuerpo convexo, y que además es invariante bajo isometrías, es una combinación lineal de los $W_i(A) = V_i(A,B^n)$".

Es decir:

$$\varphi(A) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \,.\, W_i(A).$$

para todo convexo A.

En relación con esta última expresión, Fáry considera las posibles identidades, más generales:

$$\text{I)} \qquad \varphi(A) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \,.\, V_i(A, U)$$

donde U es un convexo propio fijo, cualquiera. Para la validez de I), es evidentemente necesario que:

"*Si* $V_i(A,U) = V_i(B,U)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, *entonces* $\varphi(A) = \varphi(B)$

y la prueba de su suficiencia conduce a Fáry a formular y demostrar el siguiente teorema:

"Si una funcional φ, de valores en R y definida para todo cuerpo convexo, es continua, aditiva, invariante por traslaciones, y es constante cuando son constantes los valores de los volúmenes mixtos con el argumento U, entonces: existen números reales a_0, $a_1, \ldots a_n$ bien determinados, tales que:

$$\varphi(A) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i V_i(A, U).$$

para todo cuerpo convexo A".

De este resultado, concluye Fáry los teoremas: $k, i, j = 0, 1, ..., n$.

$$\text{II)} \qquad \int V_k(A, U)\, dA = \sum_{i,j} \alpha_k^{ij}\, W_i(A) \,.\, W_j(U).$$

$$\text{III)} \qquad \int \varphi(A)\, dA = \sum_{i,j} \beta^{ij}\, W_i(A)\, W_j(U).$$

donde dA es la "densidad cinemática" para rotaciones de A, y la integración en ambas fórmulas lo mismo que en todas las siguientes está extendida a todo el grupo de rotaciones de R^n.

Queda propuesto en [1, p. 25], y es objeto de esta nota, la determinación de los valores numéricos de las constantes universales α_k^{ij} de (II).

De las propiedades de los volúmenes mixtos, interesan particularmente:

1) $V_k(A, B) = V_{n-k}(B, A)$ Ver, p. ej.: [1, p. 7]

2) $V_k(A, \lambda B) = \lambda^k \,.\, V_k(A, B)$ [2, p. 10]

3) $V(\lambda A + \mu B) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \,.\, V_k(A, B)\, \lambda^{n-k} \,.\, \mu^k$ [3, p. 40]

Además, por la invariancia de la medida cinemática por inversión del movimiento, es:

$$\text{4)} \qquad \int V_k(A, B)\, dA = \int V_k(A, B)\, dB$$

Bajo estas hipótesis, tenemos:

$$\int V_k(\lambda A, \mu U)\, dA = \mu^k \int V_k(\lambda A, U)\, dA = \mu^k \int V_k(\lambda A, U)\, dU =$$
$$= \lambda^{n-k} \mu^k \int V_k(A, U)\, dU = \lambda^{n-k} \mu^k \int V_k(A, U)\, dA.$$

Por tanto:

$$\int V_k(\lambda A, \mu U)\, dA = \sum_{i,j} \alpha_k^{ij}\, W_i(\lambda A) \,.\, W_j(\mu U) =$$
$$= \lambda^{n-k} \mu^k \int V_k(A, U) \,.\, dA = \sum_{i,j} \alpha_k^{ij}\, W_i(A)\, W_j(U)\, \lambda^{n-i} \mu^{n-j}$$

Identificando coeficientes en estos polinomios idénticos en $\lambda^p \mu^q$, resulta:

1) El coeficiente de $\mu^k \lambda^{n-k}$ cumple:

$$\int V_k(A, U)\, dA = \alpha_k^{k,n-k} \, . \, W_k(A)\, W_{n-k}(U) \qquad \text{(para todo } k,\ n\text{)}$$

2) Si $\alpha_k^{ij} \neq \alpha_k^{k,k-k}$, es $\alpha_k^{ij} = 0$

Resultados válidos para n, k, cualesquiera.

Tomando $U = B^n$, se determinan los valores particulares de $\alpha_k^{k,n-k}$

$$\int V_k(A, B^n)\, dB^n = V_k(A, B^n) \int dB^n = \alpha_k^{k,n-k} \, . \, V_k(A, B^n) \, . \, V(B^n)$$

Luego:

$$\alpha_k^{k,n-k} = \frac{1}{V(B^n)} \int dB^n = \lambda_n \qquad \text{independiente de } k.$$

Con notaciones empleadas en la literatura, se tiene (ver p. ej.: [5, p. 180]):

$$\int d\, B^n = O_1 \, . \, O_2 \ldots O_{n-1}$$

donde:

$$O_i = \frac{2\pi^{\frac{i+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}, \quad V(B^n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

siendo O_i el área de la esfera de radio unidad en el espacio de $i+1$ dimensiones, y $V(B^n)$ el volumen de la esfera de radio unidad de R^n.

Además:

$$\frac{O_{n-1}}{V(B^n)} = n.$$

Queda, finalmente:

$$\lambda_n = n \,.\, O_1 \,.\, O_2 \ldots O_{n-2}$$

La fórmula II) de Fáry queda, por tanto:

$$\int V_k(A, U)\, dA = \lambda_n\, W_k(A) \,.\, W_{n-k}(U).$$

Con estto se pueden calcular inmediatamente también las β^{ij} de la fórmula III) de Fáry en función de las α_i que caracterizan la funcional $\varphi(A)$ de I). Resulta:

$$\beta^{i,n-i} = \lambda_n\, \alpha_i = n \,.\, O_1 \ldots O_{n-2} \,.\, \alpha_i$$

$$\beta^{i,j} = 0 \text{ si } \beta^{ij} \neq \beta^{i,n-i}$$

y por tanto:

$$\int \varphi(A)\, dA = \sum_{i=0}^{n} \beta^{i,n-i}\, W_i(A) \,.\, W_{n-i}(U) =$$

$$= n \,.\, O_1 \,.\, O_2 \ldots O_{n-2} \,.\, \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\, W_i(A) \,.\, W_{n-i}(U).$$

Aplicación: Del resultado anterior se deduce inmediatamente una demostración de la fórmula fundamental cinemática de la Geometría Integral para el caso de cuerpos convexos. En efecto, si se supone U fijo y A móvil con densidad cinemática $dK = [dA \,.\, dP]$ (dP = elemento de volumen del espacio), considerando primero traslaciones, la integral de dP extendida a todas las posiciones en que A tiene punto común con U, es precisamente $V\,(A + U)$. Por tanto:

$$\int_{U \cap A \neq 0} dK = \int V(A + U)\, dA = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} \int V_k(A, U)\, dA =$$

$$= \lambda_n \,.\, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} W_k(A)\, W_{n-k}(U) =$$

$$\lambda_n [V(A) + V(U)]\, V(B^n) + \lambda_n \,.\, \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} W_k(A) \,.\, W_{n-k}(U) =$$

$$= O_1 \,.\, O_2 \ldots O_{n-1} [V(A) + V(U)] +$$

$$+ n \,.\, O_1 \,.\, O_2 \ldots O_{n-2} \,.\, \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} W_k(A) \,.\, W_{n-k}(U).$$

Mediante la relación: [5 p. 183] :

$$M_{k-1} = n \,.\, W_k$$

(donde M_k *es* la k-ésima función simétrica elemental de los $n-1$ radios de curvatura principales), se obtiene finalmente:

$$\int\limits_{U \cap A \neq 0} d\,K = O_1 \,.\, O_2 \ldots O_{n-1} [V(A) + V(U)] + \\ + O_1 \,.\, O_2 \ldots O_{n-2} \,.\, \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} M_{k-1}(A) \,.\, M_{n-k-1}(U).$$

Esta demostración, para $n = 2, 3$, se encuentra por ejemplo en [4]. Para $n > 3$ se había obtenido siempre como caso particular de la fórmula fundamental cinemática, válida para cuerpos no necesariamente convexos (ver, por ejemplo, [6, p. 243]).

[1] FÁRY, I: *Translation invariant, additive functionals related to mixed volumes.* Technical Report Nº 15 for Office of Naval Research. Dep. of Mathematics, Univ. of California. Dec. 1960.

[2] FENCHEL, W.: *Uber die neuere Entwicklung der Brunn-Minkowskischen Theorie der konvexen Körper.* Congrès des Mathématiques a Helsingfors, 1938.

[3] BONNESEN, T., FENCHEL, W.: *Theorie der Konvexen Köper.* Berlín, 1934 (Springer).

[4] REY PASTOR, J., SANTALÓ SORS, L. A.: *Geometría integral.* Buenos Aires, 1951 (Espasa Calpe).

[5] SANTALÓ, L. A.: *Sur la mesure des espaces linéaires qui coupent un corps convexe, et problèmes qui s'y rattachent.* Colloque sur des questions de réalité en Géometrie. Liége, mai 1955.

[6] HADWIGER, H.: *Vorlesungen über Inhalt, Oberfláche und isoperimetrie.* Die Grundlagen der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, XCIII, Berlín, 1957 (Springer).