Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 25, 1970.

UNE PROPRIETE DES RACINES DE L'UNITE

par J.Dieudonné

Dedicado al Profesor Alberto González Domínguez

1. Soient p un nombre premier, $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_r$ $(r < p)$ des racines p-èmes de l'unité, deux à deux distinctes, et soient

$$0 \leqslant m_1 < m_2 < \ldots . < m_r \leqslant p-1$$

r entiers. M. Morgenstern, assistant à la Faculté des Sciences de Nice, a conjecturé que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega_1^{m_1} & \omega_1^{m_2} & \ldots & \omega_1^{m_r} \\ \omega_2^{m_1} & \omega_2^{m_2} & \ldots & \omega_2^{m_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_r^{m_1} & \omega_r^{m_2} & \ldots & \omega_r^{m_r} \end{vmatrix}$$

n'est jamais nul. Je me propose de donner une démonstration de cette conjecture.

2. Considérons le polynôme en $x_1,x_2,\ldots,x_r$

$$(1) \quad \Delta(x_1,x_2,\ldots,x_r) = \begin{vmatrix} x_1^{m_1} & x_1^{m_2} & \ldots & x_1^{m_r} \\ x_2^{m_1} & x_2^{m_2} & \ldots & x_2^{m_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_r^{m_1} & x_r^{m_2} & \ldots & x_r^{m_r} \end{vmatrix}$$

Il est clair que $\Delta(x_1,x_2,\ldots,x_r)$ est divisible par le déterminant de Vandermonde $V(x_1,\ldots,x_r) = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$ et que le quotient $F(x_1,x_2,\ldots,x_r)$ est un polynôme à coefficients *entiers*. Il s'agit de prouver que $F(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_r) \neq 0$; or, les ω_k sont des puissances d'une racine p-ème primitive ξ de l'unité, donc $F(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_r)$ s'écrit comme polynôme $\phi(\xi)$ de degré $\leqslant$ p-1 en ξ, à coefficients

entiers; si l'on avait $\phi(\xi) = 0$, on aurait donc, vu l'irréductibilité du polynôme cyclotomique, $\phi(x) = A.(x^{p-1}+ x^{p-2}+ \ldots + 1)$, où A est un *entier*: par suite $\phi(1) = F(1,1,\ldots,1)$ serait *divisible par p*, et tout revient à voir que c'est impossible.

3. Or, de façon générale, considérons r fonctions d'une variable, $f_1, f_2, \ldots, f_r$, indéfiniment dérivables; alors, pour $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$ réels on peut écrire le déterminant

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \ldots & f_r(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \ldots & f_r(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1(x_r) & f_2(x_r) & \ldots & f_r(x_r) \end{vmatrix}$$

comme produit du déterminant de Vandermonde $V(x_1,\ldots,x_r)$ et d'un déterminant de la forme

$$\frac{1}{1!2!3!\ldots(r-1)!}\begin{vmatrix} f_1(\xi_1) & f_2(\xi_1) & \ldots & f_r(\xi_1) \\ f_1'(\xi_2) & f_2'(\xi_2) & \ldots & f_r'(\xi_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(r-1)}(\xi_r) & f_2^{(r-1)}(\xi_r) & \ldots & f_r^{(r-1)}(\xi_r) \end{vmatrix}$$

où les ξ_j sont compris dans l'intervalle d'extrémités x_1 et x_n.(1) Appliquant cela au polynôme (1) et faisant tendre les x_j vers 1, on obtient

(1) Voir G. POLYÁ und G. SZEGÖ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, vol. II, p. 54 et 240 (Berlin (Springer), 1925).

(2) $F(1,1,\ldots,1) =$

$$= \frac{1}{1!2!3!\ldots(r-1)!}\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ m_1 & \ldots & m_r \\ m_1(m_1-1) & \ldots & m_r(m_r-1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ m_1(m_1-1)\ldots(m_1-r+2) & \ldots & m_r(m_r-1)\ldots(m_r-r+2) \end{vmatrix}$$

et comme $r < p$, il suffit de montrer que le déterminant du second membre n'est pas divisible par p. Mais par combinaison de lignes, on voir aussitôt que ce déterminant n'est autre que le déterminant de Vandermonde $V(m_1,m_2,\ldots,m_r) = \prod_{i<j}(m_j-m_i)$, qui ne peut être divisible par p.

UNIVERSITÉ DE NICE
Faculté des Sciences.

Recibido en abril de 1970.