Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 25, 1971.

CASI - NORMAS EN ANILLOS

por Jorge Edelman y Angel Larotonda

Dedicado al profesor Alberto González Domínguez

INTRODUCCION. Los anillos de Banach han sido utilizados recientemente en algunas cuestiones de K-teoría (ver [1],[2]). El objeto de este trabajo es determinar bajo qué condiciones un anillo topológico es un anillo casi-normado, lo cual se hace en el teorema 1; el método de construcción de una casi-norma se basa esencialmente en el teorema de metrización de espacios uniformes ([3]).

DEFINICION 1. Un *anillo topológico* A consiste de un anillo provisto de una topología que hace continuas las aplicaciones

$$(x,y) \to x+y \ , \ (x,y) \to x.y \ , \ x \to -x \ .$$

DEFINICION 2. Una *casi-norma* en un anillo A es una aplicación $p: A \to \mathbb{R}$ que verifica las condiciones:

QN_1) $p(x) \geqslant 0$ para todo $x \in A$, $p(0) = 0$

QN_2) $p(x) = p(-x)$ para todo $x \in A$

QN_3) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ si $x \in A$, $y \in A$

QN_4) $p(x.y) \leqslant p(x) . p(y)$ si $x \in A$, $y \in A$

Es evidente que si p es una casi-norma en A, la función

$$(x,y) \to |x-y| = p(x-y)$$

es una seudométrica en A; A provisto de la topología asociada a esta seudométrica es un anillo topológico. Es claro también que A resulta separado si y sólo si "$p(x) = 0$ sólo es posible para $x = 0$". Diremos que un anillo topológico A es *casi-normable* si existe alguna casi-norma en A que induce la topología de A.

TEOREMA 1. *Sea* A *un anillo topológico. Entonces* A *es casi-normable si y sólo si: existe un sistema fundamental de entornos de* 0,

$(U_n)_{n\geq 1}$ *que verifica:*

a) $U_{k+1} \subset U_k$ *para todo* $k \geqslant 1$

b) $U_k = -U_k$ *para todo* $k \geqslant 1$

c) $U_n \cdot U_m \subset U_{n+m}$ *si* $n,m \geqslant 1$

d) $U_n + U_n + U_n \subset U_{n-1}$ *para todo* $n > 1$

Demostración. Las condiciones son necesarias; en efecto si $p: A \to \mathbb{R}$ es una casi-norma definimos $U_n = \{x : p(x) < 2^{-3n}\}$ para $n \geqslant 1$ y es claro que los U_n $(n \geqslant 1)$ forman una base de entornos de 0 que cumple las condiciones a),b),c),d).

La suficiencia se prueba así: pongamos $U_o = A$ y sea $\varphi: A \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si} \quad x \in U_n \text{ y } x \notin U_{n+1} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \cap_{n\geq 1} U_n = \{\overline{0}\} \end{cases}$$

y sea $p: A \to \mathbb{R}$ definida por $p(x) = \inf\{ \sum \varphi(x_i) : \sum x_i = x \}$.

Es evidente que esta aplicación p verifica la condición QN_1); asimismo QN_2) se deduce de la condición b). Para QN_3) se procede como sigue: dado $\epsilon > 0$, sean x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ y x'_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ tales que $p(x) + \epsilon/2 \geqslant \sum_{i=1}^n \varphi(x_i)$, $p(y) + \epsilon/2 \geqslant \sum_{j=1}^m \varphi(x'_j)$, $\sum_{i=1}^n x_i = x$ y $\sum_{j=1}^m x'_j = y$.

Entonces $p(x) + p(y) + \epsilon \geqslant \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) + \sum_{j=1}^m \varphi(x'_j) \geqslant p(x+y)$ pues $\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{j=1}^m x'_j = x + y$. Como ϵ es arbitrario , resulta QN_3).

Para QN_4), la prueba es análoga: dado $\epsilon > 0$ sea $\delta > 0$ tal que $\delta^2 + \delta(p(x) + p(y)) < \epsilon$, y sean x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, x'_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$

de modo que $\sum_{i=1}^{n} x_i = x$, $\sum_{j=1}^{m} x_j' = y$, $p(x) + \delta \geqslant \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)$, $p(y) + \delta \geqslant \sum_{j=1}^{m} \varphi(x_j')$. Entonces

$p(x).p(y) + \epsilon \geqslant (p(x)+\delta)(p(y)+\delta) \geqslant (\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i))(\sum_{j=1}^{m}\varphi(x_j')) \geqslant$

$\geqslant \sum_{i,j} \varphi(x_i.x_j') \geqslant p(x.y)$ pues $\sum_{i,j} x_i x_j' = (\sum_i x_i)(\sum_j x_j') = x.y$ y $\varphi(x.y) \leqslant \varphi(x).\varphi(y)$ se deduce facilmente de la definición de φ y la hipótesis c).

De todo esto se deduce que p es una casi-norma en A ; como $U_n \subset \{x : p(x) \leqslant 2^{-n}\}$ sigue que p es continua y por lo tanto la topología asociada a p es menos fina que la topología de A.

Probemos ahora que

$$\frac{1}{2}\varphi(x) \leqslant p(x) \quad \text{para todo} \quad x \in A \qquad (*)$$

Será suficiente ver que si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ entonces $\varphi(x) \leqslant 2 \sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)$; procedemos por inducción sobre n ya que para n = 1 esto es evidente. Sea $x = \sum_{i=1}^{n+1} x_i$ y pongamos $\alpha = \sum_{i=1}^{n+1} \varphi(x_i)$. Si $\alpha = 0$, cada x_i verifica $\varphi(x_i) = 0$, luego $x_i \in \overline{(0)}$ para $i \leqslant n$ y por lo tanto $x \in \overline{(0)}$ (ya que $\overline{(0)}$ es un ideal); esto da $\varphi(x) = 0 \leqslant 2.0 = 2.\alpha$ y entonces (*) es trivial.

Si $\alpha > 0$, podemos suponer (reordenando los x_i si es preciso) que $\varphi(x_1) < \alpha/2$; sea $m = \max\{p : \sum_{i=1}^{p} \varphi(x_i) \leqslant \alpha/2\}$, entonces por la hipótesis inductiva será

$$(1) \qquad \varphi(\sum_{i=1}^{m} x_i) \leqslant 2 \sum_{i=1}^{m} \varphi(x_i) \leqslant \alpha$$

Además de $\sum_{i=1}^{m+1} \varphi(x_i) > \alpha/2$ obtenemos

$$(2) \qquad \sum_{i=m+2}^{n+1} \varphi(x_i) \leqslant \alpha/2$$

y por lo tanto

(3) $$\varphi(\sum_{m+2}^{n+1} x_i) \leqslant 2 \sum_{m+2}^{n+1} \varphi(x_i) \leqslant \alpha$$

También es

(4) $$\varphi(x_{m+1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \varphi(x_i) \leqslant \alpha$$

Sea $r \in Z$ tal que $\frac{1}{2^{r+1}} \leqslant \alpha < \frac{1}{2^r}$; entonces de (1) resulta que $\sum_{i=1}^{m} x_i \in U_{r+1}$.

De (3) también sale que $\sum_{m+2}^{n+1} x_i \in U_{r+1}$ y (4) nos da $x_{m+1} \in U_{r+1}$; por la hipótesis d) deberá ser $x \in U_r$, de donde $\varphi(x) \leqslant \frac{1}{2^r} \leqslant 2\alpha$ como queríamos probar.

Ahora (*) nos dice que $\{x : p(x) < 2^{-n}\} \subset \{x : \varphi(x) \leqslant 2^{-n+1}\} \subset U_{n-1}$, lo que significa que la topología asociada a p es más fuerte que la topología de A; y en definitiva la topología de A es la asociada a p.

OBSERVACIONES. i) A es separado si y sólo si $p(x) = 0$ equivale a $x = 0$.

ii) Si los U_k son ideales, la casi-norma p construída en la demostración resulta ultramétrica (esto es, $p(x+y) \leqslant \max(p(x), p(y))$) por la condición c).

iii) Si A tiene identidad 1 no adherente a 0, $p(1) \neq 0$ y de QN_4) se deduce que $p(1) \geqslant 1$. En tal caso es clásico que $q(x) = \sup\{p(x.y) : p(y) = 1\}$ es una casi-norma equivalente a p, y que $q(1) = 1$ (cf. [2]).

REFERENCIAS

[1] M. KAROUBI et O. VILLAMAYOR, *K-théorie algébrique et K-thérie topologique*, C. R. Acad. Sci., Paris (1969), p. 416-419.

[2] M. KAROUBI, *Séminaire Heidelberg-Saarbrucken-Strasbourg sur la K-théorie*, (1970).

[3] N. BOURBAKI, *Topologie Générale*, Ch. IX.

Universidad de Buenos Aires
Argentina

Recibido en diciembre de 1970.