Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 25, 1971.

JUEGOS DIFERENCIALES ANORMALES

Emilio O. Roxin*

Dedicado al profesor Alberto González Domínguez

RESUMEN. Se considera un juego diferencial anormal, en el sentido de que la función "pago" es una funcional expresada como integral curvilínea de la trayectoria, pero con la propiedad de que aparecen diversos valores de la variable independiente en el integrando. Se da este ejemplo para llamar la atención sobre formas funcionales de la función "pago" que escapan a la teoría clásica.

1. INTRODUCCION. De acuerdo con Isaacs [1] un juego diferencial de tiempo prefijado está dado por una ecuación diferencial vectorial

$$x' = f(t,x,u,v) \quad , \tag{1}$$

donde t es la variable independiente (tiempo), x es la variable "estado", que es un vector n-dimensional, mientras que u , v son las respectivas variables de control cuya elección está a cargo de los dos jugadores.

Se consideran admisibles todas las funciones de control $u(t)$, $v(t)$ que son medibles y toman valores en conjuntos dados : $u(t) \in U$, $v(t) \in V$.

El juego comienza en el instante $t = 0$ y termina en el instante $t = T$ prefijado. Se dan las condiciones iniciales

* Investigación realizada bajo Grant GP-21056, National Science Foundation, U.S.A.

(2) $$x(0) = x_o$$

y una vez alcanzado el instante T se evalúa la función "pago"

(3) $$P = \int_o^T h(t,x(t),u(t),v(t))\,dt$$

que el jugador u debe pagar al jugador v.

El jugador u debe elegir su control u(t) de manera de hacer mínimo el pago P, mientras que el jugador v trata de elegir v(t) de manera de hacer P máximo. En los juegos de información perfecta (considerados en el presente trabajo), en cada instante t ambos jugadores conocen las reglas del juego, vale decir las condiciones (1), (2), (3), los conjuntos U, V, así como la evolución del juego en el pasado (es decir las funciones $u(\tau)$, $v(\tau)$, $x(\tau)$ para $0 \leqslant \tau < t$); con esta información deben elegir u(t), v(t).

Esta última condición referente a la información de ambos jugadores es esencial y distingue claramente a los juegos diferenciales de los problemas de simple optimización. La forma clásica de una estrategia para, digamos, el jugador u, es elegir u(t) como función del estado: $u(t) = \bar{u}(x(t))$ (véase [1]).

Llamamos "juegos diferenciales normales" a aquéllos en que en cada instante t ambos jugadores poseen la información necesaria para evaluar la parte de la integral (3) del "pago" correspondiente al intervalo $[0,t]$. Ello está de acuerdo con el principio de causalidad en la mayoría de los modelos físicos conducentes a juegos gos diferenciales. Pueden darse, sin embargo, juegos en que ello no sucede y la teoría clásica no es por lo tanto aplicable. En tal caso diremos que el juego diferencial es "anormal".

2. EL JUEGO CONSIDERADO. Consideramos el estado del juego caracterizado por un vector bidimensional $\binom{x}{y}$. Cada jugador actúa sobre una componente de acuerdo al sistema diferencial

(4) $$\begin{aligned} x' &= ax + u \\ y' &= by + v \end{aligned}$$

donde son admisibles todas las funciones de control medibles que toman valores en el intervalo $[-1,+1]$:

(5) $$-1 \leqslant u(t) \leqslant 1 \quad , \quad -1 \leqslant v(t) \leqslant 1 \quad .$$

Fijamos valores iniciales

(6) $$x(0) = y(0) = 0 \quad ,$$

y para la función "pago" la funcional

(7) $$P = \int_o^1 x(t)\, y\,(1-t)dt \quad .$$

Debe notarse que esta funcional no es del tipo (3), por aparecer los valores de x e y en instantes diferentes. Seguimos suponiendo, sin embargo, que en el instante t ambos jugadores conocen $x(\tau)$, $y(\tau)$ para $0 \leqslant \tau \leqslant t$.

3. **SOLUCION.** Se denomina "estrategia" del jugador u a toda "receta" que le permita determinar, en cada instante t, su correspondiente control u(t) en función de la información que posee en ese momento. Se supone que dicha "receta" es tal que, bajo todas las condiciones posibles del juego, determine un control u(t) admisible. Análogamente se define una estrategia para el jugador v.

Una vez que ambos jugadores han decidido sus correspondientes estrategias, toda la evolución del juego queda determinada; así por ejemplo quedan determinadas las funciones de control u(t) , v(t). Para diferenciar las funciones de control u(t) , v(t) de las estrategias que determinan estos valores, escribiremos $\bar{u}$, $\bar{v}$ para las estrategias. Así, la función "pago" P también queda determinada por las estrategias de ambos jugadores y puede escribirse $P = P[\bar{u},\bar{v}]$.

Se dice que las estrategias $\bar{u}^*$, $\bar{v}^*$ son "óptimas" y que forman un "punto de ensilladura" si, para cualquier otro par de estrategias $\bar{u}$, $\bar{v}$ se verifica que

(8) $$P[\bar{u}^*,\bar{v}] \leqslant P[\bar{u}^*,\bar{v}^*] \leqslant P[\bar{u},\bar{v}^*] \quad .$$

Es fácil ver que, de existir, estas estrategias óptimas pueden no ser únicas, pero todos los posibles pares de estrategias óptimas determinan el mismo valor de la función "pago", que entonces se denomina "Valor" del juego.

En nuestro caso es fácil ver en qué forma ambos jugadores deben determinar sus controles en la segunda mitad del juego, es decir para $\frac{1}{2} < t \leqslant 1$. Efectivamente, en este intervalo el pago (7) se puede descomponer en

$$P = \int_0^{1/2} x(\tau)\, y\,(1-\tau)d\tau + \int_{1/2}^{1} x(\tau)\, y\,(1-\tau)d\tau \quad , \tag{9}$$

donde en la primera integral $x(\tau)$ es conocida, mientras que en la segunda integral lo es $y(1-\tau)$. El problema para cada jugador es por consiguiente el de optimizar una integral sobre la cual el otro jugador no posee ninguna influencia. Este es un caso clásico del cálculo de variaciones que no ofrece mayor dificultad.

Queda el problema de determinar en forma óptima la estrategia de los jugadores en la primera mitad del juego. La simetría del problema hace plausible esperar que adoptar $u(t) = 0$, $v(t) = 0$ sean las estrategias óptimas. Demostremos directamente que ello es cierto.

Es evidente que para $\bar{u}^* = \bar{v}^* = 0$ se verifican las desigualdades (8) siendo $\bar{u}$, $\bar{v}$ cualesquiera. Aún más, es evidente que si en la primera mitad del juego, $u(t) = 0$, pero el jugador v adopta otra estrategia, entonces en la segunda mitad del juego el jugador u puede obtener un pago mejor (menor, dado que u desea minimizar). Para ello basta elegir $u(t)$ tal que, donde $y(1-t) > 0$, resulte $x(t) < 0$ y vice-versa. Esto demuestra que el jugador v, al adoptar una estrategia distinta de $\bar{v}^* = 0$, se ha perjudicado.

4. COMENTARIOS. Se ha podido llegar a la solución de este juego debido a su extrema sencillez. Posibles generalizaciones en las que se adopten otras ecuaciones (4), condiciones iniciales (6) o función pago (7) quedan a cargo del lector. Puede, sin embargo, preverse que adoptando ecuaciones y funcionales bastante

generales, la obtención de las estrategias óptimas es sumamente difícil. Por lo menos el método clásico, basado en la "ecuación principal" de Isaacs ([1]) o en el Principio del máximo de Pontrjagin ([2]), no es aplicable (a menos que se considere su posible generalización en un espacio de Banach). Por otra parte, la aproximación del juego diferencial por un juego discreto, a la manera propuesta por Friedman ([3], [4]), permite resolverlo por el método de programación dinámica de Bellman ([5]).

Queda como problema abierto el de encontrar una teoría satisfactoria aplicable a tales tipos de juegos diferenciales anormales.

BIBLIOGRAFIA

[1] RUFUS ISAACS, *Differential Games*, John Wiley & Sons, New York, 1965.

[2] L.S. PONTRJAGIN, V. BOLTYANSKII, R. GAMKRELIDZE, E. MISHCHENKO, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, edición rusa Gusudarstvennoe Izdatelstvo Fiziko-Matematicheskoi Literaturi, Moscú, 1961. Traducción inglesa por Interscience Publishers, New York, 1962.

[3] AVNER FRIEDMAN, *On the Definition of Differential Games and the Existence of Value and of Saddle Points*, J. Differential Equations 7 (1970), 69-91.

[4] --------------, *Existence of Value and of Saddle Points for Differential Games of Pursuit and Evasion*, J. Differential Equations 7 (1970), 92-110.

[5] RICHARD BELLMAN, *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton N.J., 1957.

University of Rhode Island
Kingston, R.I., E.E.U.U.

Recibido en mayo de 1971.