Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 27, 1975.

UN EJEMPLO DE GEOMETRIAS METRICAS EUCLIDIANAS EN CUALQUIER DIMENSION EN LAS QUE NO RIGE EL AXIOMA DE PARALELISMO DE EUCLIDES

Heinz-Reiner Friedlein

Por los axiomas en [2] ó [4] es posible construir geometrías en cualquier dimensión. Adjuntamos a los axiomas de [2] el siguiente:

EUC. Para $g \perp h$ existe un punto S I g, h y dos rectas que pasan por S con $s \perp t$ tales que $g \perp s \perp t \perp h$. Se dice que las rectas s, h ó g, t están en una escalera.

Decimos que la geometría así descrita es una geometría métrica euclidiana. Es conocido que ciertas geometrías afines son geometrías métricas euclidianas.

Ahora queremos construir un ejemplo de una geometría métrica euclidiana que no es geometría afín. El ejemplo que vamos a construir es una generalización de un ejemplo para el plano métrico euclidiano que figura en [1].

Designaremos los puntos y las rectas de las geometrías por letras mayúsculas y minúsculas, respectivamente. Un haz propio con soporte P es el conjunto de todas las rectas que pasan por P.

El teorema principal en [2] nos muestra que es posible extender cada geometría métrica euclidiana a una geometría proyectiva o bien que la geometría métrica euclidiana es sumergible en una geometría proyectiva, que se dice geometría proyectiva euclidiana.

TEOREMA 1. a) *En un espacio métrico euclidiano todos los haces propios tienen la misma cardinalidad.*

b) *Además, cada haz de la geometría proyectiva euclidiana tiene la misma cardinalidad que un haz propio en la geometría métrica euclidiana.*

Un haz de la geometría proyectiva euclidiana es definido en forma análoga a un haz propio de una geometría euclidiana.

Demostración. a) Sean dos haces diferentes que tienen como soportes los puntos diferentes O y P respectivamente. Sea g I O; según

[2] existe exactamente un h I P y perpendicular a g. Esto implica un mapeo biyectivo del conjunto de las rectas del haz determinado por O sobre el conjunto de las rectas que pasan por P.

b) Sea G un haz que contiene rectas proyectivas, que no son rectas métricas. Elegimos un punto métrico O como centro de un "snail map" (comparar [3]). Existen en G dos rectas métricas euclidianas diferentes a, b, tal que a, b no tienen ni un punto métrico ni una recta métrica euclidiana en común que sea ortogonal a las dos; entonces existe un "snail map" con centro O tal que la imagen G' de G bajo este mapeo es un haz propio. Las preimágenes de las rectas de G' son - por construcción (comparar [3]) - rectas proyectivas y están en correspondencia 1-1 con el snail map.

Queda por demostrar que los haces G con la propiedad que todas las rectas de G son perpendiculares a un hiperplano de la geometría métrica euclidiana que pasa por O tienen la misma cardinalidad. Pero como estamos en una geometría proyectiva, se sabe que los haces de esta geometría tienen la misma cardinalidad.

DEFINICION. *Una geometría afín que es una geometría métrica euclidiana se llama geometría euclidiana.*

Desde luego, no toda geometría afín es una geometría euclidiana. Por ejemplo, las geometrías afines con coordenadas en un cuerpo no conmutativo no son geometrías euclidianas (comparar [1]).

TEOREMA 2. *Cada geometría métrica euclidiana es sumergible en una geometría euclidiana.*

Demostración. Según [2] ó [3] cada geometría métrica euclidiana es sumergible en una geometría métrica proyectiva E_p. Elegimos en E_p subconjuntos Π_o, Γ_o de puntos y rectas respectivamente.

$$\Pi_o = \{P \in E_p \mid \nexists\, g \neq h, g, h \text{ I } P \text{ tal que } g, h \perp H, H \text{ hiperplano y } g, h \text{ rectas en la geometría métrica euclidiana}\}$$

$$\Gamma_o := \{r \in E_p \mid Q, R \in \Pi_o, Q \neq R \text{ y } Q, R \text{ I } r\}$$

Entonces Π_o y Γ_o determinan una geometría afín y todos los puntos métricos euclidianos se encuentran en Π_o y todas las rectas métricas euclidianas pertenecen a Γ_o. Según [3] cada recta de Γ_o es eje de una reflexión. Esto implica que Π_o, Γ_o determinan una geometría euclidiana [3].

Con este resultado podemos construir nuestro ejemplo.

Consideremos el anillo $\overline{C}_o = \langle \{1/p \mid p = 2, 4\ell + 1, \ell \in N\} \rangle$

Sea $\Pi := \{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\ldots) \mid \alpha_1,\ldots,\alpha_n,\ldots \in \overline{C}_o\}$ un conjunto de puntos cuyas coordenadas pertenecen a $\overline{C}_o$. Es claro que Π es un subconjunto de los puntos de una cierta geometría euclidiana A (R) con coordenadas en R. Además A (R) es una geometría afín y el espacio vectorial con producto interno correspondiente es un espacio de Hilbert.

NOTA. Es posible demostrar que la geometría métrica euclidiana determina este producto interior (comparar [2]).

Como conjunto Γ de rectas definimos: Si P es un punto de Π entonces las rectas de Γ son las rectas g de A (R) con la siguiente propiedad: g es la unión de P con un punto $Q \in \Pi$ y $Q \neq P$.

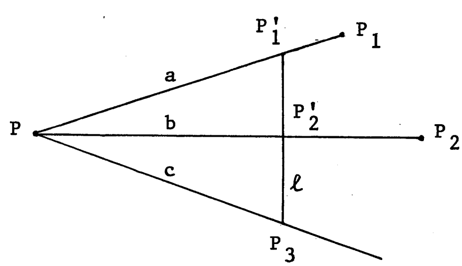
Ahora queremos demostrar que (Π, Γ, I) es una geometría métrica euclidiana pero no una geometría euclidiana.

TEOREMA 3. (Π, Γ, I) *determina una geometría métrica euclidiana en la que no vale el axioma de paralelismo de Euclides.*

Demostración. Usamos los axiomas de [2]. Estos axiomas exigen también para la geometría métrica euclidiana una relación $\perp$ y reflexiones en puntos y rectas. Pero A (R) tiene estas propiedades. Axioma 1 de [2] se cumple pues Π,Γ son subconjuntos de los puntos y rectas en A (R).

Axioma 2. Sean $\overline{g}_o$, $\overline{h}_o$, $\overline{j}_o$, $\overline{a}_o$, $\overline{g}_1$, $\overline{j}_1$ reflexiones en A (R) con ejes g_o, h_o, j_o, a_o, g_1, j_1 respectivamente y g_o, h_o, j_o I A; h_o, g_1, j_1 I B; $A \neq B$. Entonces tenemos $\overline{g}_o \cdot \overline{h}_o \cdot \overline{j}_o = \overline{a}_o$ con a_o I A y $\overline{j}_1 \cdot \overline{h}_o \cdot \overline{y}_o = \overline{a}_1$ con a_1 I B.

Axioma 3. Dados los puntos y rectas como en el dibujo



$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = \overline{d}$ con a, b I P implica según [2] que a, b, c se encuentran en un plano métrico euclidiano. Sea ℓI P_3 la recta perpendicular a b por P_2' tal que corta la recta a en P_1'. Falta demostrar que P_1', $P_2' \in \Pi$. Pero esto sale de [1],pág. 288/299, fórmula (1) y (3).

Axioma 4. Sean $g = (P, P')$, $h = (P,Q')$ diferentes y $(P,P') \not\perp (P,Q')$. Entonces (P,P'), (P,Q') determinan un plano euclidiano A_2 (R) de A (R). Se sabe que en A_2 (R) la reflexión $\overline{P}$ en el punto P es el producto $\overline{g}.\overline{r}$ con $r \perp g$, $r \in A_2$ (R). Análogamente como en la demostración para axioma 3, existe un punto A I r y $A \in \Pi$ tal que $(A, Q') \not\perp r$. El teorema de tres reflexiones [1] implica que $\overline{(P,P')}.\overline{(P,Q')}.\overline{r}$ es una reflexión en una cierta recta d I P.

El axioma 5 sigue inmediatamente de la demostración de los axiomas 3 y 4.

Axiomas 6 y 7 se satisfacen, pues estamos en A (R).

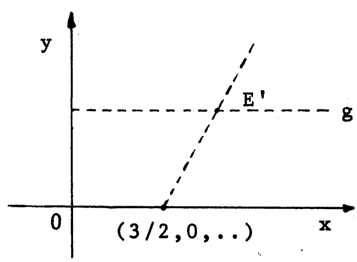
Axioma 8 es trivial pues en A (R) no existen puntos P,Q distintos con $\overline{P}.\overline{Q} = \overline{Q}.\overline{P}$.

Axioma 9. La existencia de tres puntos que no se encuentran en una sola recta es trivial (ver la demostración del axioma 4) y desde luego dos puntos diferentes se encuentran sobre cada recta.

Además la geometría construída cumple trivialmente Euc. Por tanto Π,Γ son los conjuntos de puntos y rectas respectivamente de una geometría métrica euclidiana.

Ahora vamos a demostrar que esta geometría no satisface el teorema de las paralelas de Euclides.

Como cada geometría afín satisface este teorema, estamos listos con la demostración si hemos encontrado dos rectas distintas g,h con g, h I E, $x \cap g = \emptyset$, $x \cap h = \emptyset$; $g, h \in \Gamma$, $P \in \Pi$. Como $1/3 \notin \overline{C}_0$ entonces $(1/3,0,\ldots) \notin \Pi$ pero 0, $E' = (1,1,0,\ldots) \in \Pi$. Además sabemos que los ejes coordenados x e y pertenecen a Γ. Pero en el plano euclidiano que determinan x e y se tienen dos rectas diferentes g, h que pasan por E' y que no cortan la recta x. Elegimos g como la recta ortogonal a y con g I E' y como h la recta



en el plano euclidiano de ecuación $y = 3/2\ x - 1/2$, h pertenece a

Γ pues $(0,-1/2,0,\ldots)$ y E' se encuentran sobre h y E'. $(0,-1/2,0,\ldots,0,\ldots) \in \Pi$ pero la intersección con x es $(3/2,0,0,\ldots) \notin \Pi$.

REFERENCIAS

[1] F. BACHMANN, *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Berlin 1973.

[2] G. EWALD, *Spiegelungsgeometrische Kennzeichnung euklidische und nichteuklidischer Räume beliebiger Dimension*, Math. Abh Sem. Hamburg 41 (1974).

[3] H.R. FRIEDLEIN, *Enbettung beliebig dimensionaler metrischer Räume mit Hilfe von Halbdrehungen.*

[4] SMITH, *Orthogonal Geometries I,II*, Geometriae Dedicata 1 (1973).

Bochum Ruhr - Universität
Mathematisches Institut
Alemania Federal

y Universidad Santa María
Valparaiso, Chile

Recibido en abril de 1975
Versión final en junio de 1975