Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 32, 1986.

PROBLEMAS DE CONTROL PARA UNA ECUACION UNIDIMENSIONAL NO HOMOGENEA DEL CALOR

(PARTE I)

Luis Tadeo Villa

RESUMEN. En este artículo se analizan los siguientes problemas de contorno e inicial para la ecuación del calor

$$(\S)\quad \begin{cases} u_{xx} - u_t = F(u_x(0,t)), & 0 < x < \infty \ , \quad 0 < t < T \\ u(0,t) = 0 \\ u(x,0) = h(x) \ , \quad x > 0 \end{cases}$$

$$(\S\S)\quad \begin{cases} u_{xx} - u_t = F(u_x(0,t)), & 0 < x < 1 \ , \quad 0 < t < T \\ u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = f(t) \\ u(x,0) = h(x) \end{cases}$$

donde u(x,t) denota temperatura función de la posición x y el tiempo t; F denota una densidad de fuente o sumidero de energía uniforme en x.

Como una primera etapa en vista a abordar algunos problemas de control para (§) y (§§), se obtienen resultados de existencia y unicidad de la solución como así también resultados sobre cotas y comportamiento asintótico cuando F y los datos satisfacen ciertas hipótesis.

1. PRELIMINARES.

No es difícil ver que si $u = u(x,t)$ satisface el problema (§), entonces admite la siguiente representación:

$$(1.1)\qquad u(x,t) = \int_0^\infty K(x,t,\xi,0).h(\xi)d\xi - \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right).F(V(\tau))d\tau$$

donde

$$K(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \cdot [\exp(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}) - \exp(-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\tau)})]$$

y si satisface el problema (§§), admite la siguiente

(1.2) $$u(x,t) = x.f(t) + \int_0^1 K_o(x,\xi,t)[h(\xi) - f(0).\xi]d\xi +$$

$$+ \int_0^t K_1(x,t-\tau)F(V(\tau))d\tau + \int_0^t K_2(x,t-\tau)\dot{f}(\tau)d\tau$$

donde

$$K_0 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2.t}.\text{sen}(k\pi x)\ \text{sen}(k\pi\xi)$$

$$K_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.e^{-k^2\pi^2.(t-\tau)}.\text{sen}(k\pi x) \quad ; \quad a_k = -\frac{1}{k\pi}[1-(-1)^k]$$

$$K_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k.e^{-k^2\pi^2.(t-\tau)}.\text{sen}(k\pi x) \quad ; \quad b_k = \frac{1}{k}.(-1)^k$$

y la función $V = V(t)$ está definida por

(1.3) $$V(t) = u_x(0,t).$$

A partir de (1.1) se encuentra que

(1.4) $$V(t) = V_o(t) + \int_0^t H(t,\tau,V(\tau))d\tau$$

donde

(1.5) $$V_o(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{t^{3/2}} \cdot \int_0^{\infty} \xi.e^{-\xi^2/4t}.h(\xi)d\xi$$

(1.6) $$H(t,\tau,V(\tau)) = -\frac{F(V(\tau))}{\sqrt{t-\tau}}$$

y a partir de (1.2) que

(1.7) $$V(t) = V_o(t) + \int_0^t H(t,\tau,V(\tau))d\tau$$

siendo ahora

(1.8) $$V_o(t) = f(t) + \int_0^1 \overline{K}_o(0,\xi,t)[h(\xi)-f(0).\xi]d\xi$$

(1.9) $$H(t,\tau,V(\tau)) = \overline{K}_1(0,t-\tau)F(V(\tau))+\overline{K}_2(0,t-\tau)\dot{f}(\tau)$$

$$\overline{K}_o(0,\xi,t) = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} k\ e^{-k^2\pi^2 t}.\text{sen}(k\pi\xi)$$

$$\overline{K}_1(0,t-\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, e^{-k^2\pi^2(t-\tau)} \quad ; \quad c_k = (-1)^k - 1$$

$$\overline{K}_2(0,t-\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k\, e^{-k^2\pi^2(t-\tau)} \quad ; \quad d_k = (-1)^k \,.$$

2. HIPOTESIS Y RESULTADO PRINCIPAL.

Sean $F = F(V)$, $h = h(x)$, $f = f(t)$ funciones tales que:

(a) $F(V)$ continua para toda V, $F(V) = 0$ si $V=0$

(b) $|F(V_1) - F(V_2)| \leqslant C_1 |V_1 - V_2|$

(c) $h(x)$, $f(t)$ suficientemente regulares, en particular h continua acotada y f en $C^1{}_{[0,T]}$.

Bajo las hipótesis (a), (b), (c), se puede establecer el siguiente resultado

LEMA 1. *Existe una única* $V(t)$ *solución de* (1.4) *y una única solución de* (1.7). *Consecuentemente, existe una única* $u(x,t)$ *solución de* (§) *y una única* $u(x,t)$ *solución de* (§§), *bajo las precitadas hipótesis.*

Demostración. En [1] se demuestra que para una ecuación integral del tipo (1.4) ó (1.7), existe una única solución V seccionalmente continua para todo $t > 0$ si se cumplen:

(i) $H(t,\tau,V)$ continua para toda V y $t > \tau$

(ii) $|H(t,\tau,V_1)-H(t,\tau,V_2)| \leqslant L(t,\tau)|V_1-V_2|$

debiendo $L(t,\tau)$ satisfacer la condición

(iii) $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} L(t_2,\tau)d\tau \leqslant \alpha(t_2-t_1) \quad ; \quad t_2 > t_1$

para alguna función monótona creciente α, con $\lim\limits_{\eta\to 0} \alpha(\eta) = 0$

y $H(t,\tau,0)$ la condición

(iv) $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} |H(t_2,\tau,0)|d\tau \leqslant \beta(t_2-t_1) \quad , \quad t_2 > t_1$

para alguna función no-negativa β con $\lim\limits_{\eta\to 0} \beta(\eta) = 0$.

Es claro que en nuestro caso, al requerir las hipótesis (a), (b), (c), los requisitos expresados por (i)-(iv) quedan satisfechos. Por ejemplo, con referencia al problema (§) se tiene $H(t,\tau,0) = 0$

y $L(t,\tau)$ se toma como $\dfrac{C_1}{\sqrt{t-\tau}}$.

El LEMA 1 queda así demostrado.

3. ACOTACIONES Y COMPORTAMIENTO ASINTOTICO.

OBSERVACION 1. Teniendo presente (1.6) y (b), a partir de (1.4) se sigue:

$$(3.1) \qquad |V(t)| \leqslant |V_o(t)| + C_1 \int_0^t \frac{|V(\tau)|}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau$$

ahora, a partir de (3.1) aplicando el método de inversión de Abel y una estimación tipo Gronwall [2], se obtiene

$$(3.2) \qquad |V(t)| \leqslant [1 + 2C_1 t^{1/2}]\, |V_o(t)|\; e^{\pi C_1^2 t} \leqslant$$

$$\leqslant [1 + 2C_1 T^{1/2}]\; e^{\pi C_1^2 T} . |V_o(t)|$$

teniendo presente (3.2), de (1.1) se infiere la siguiente acotación para $u(x,t)$ solución de (§):

$$(3.3) \qquad |u(x,t)| \leqslant \|h\| + C_1 [1 + 2C_1 T^{1/2}]\; e^{\pi C_2 T} \int_o^t |V_o(t)|dt$$

LEMA 2. *Sea* $u(x,t)$ *solución de* (§). *Si además de* (a), (b), (c) *se tiene* $V_o(t)$ *no decreciente,* $V_o(0) > 0$, $VF(V) > 0$, $V(t)$ *analítica para* $t > 0$. *Entonces resulta* $V(t) > 0$, *para todo* $t \in [0,T]$.

Demostración. Por el absurdo supóngase que en $t = t_o$, $V(t)$ cambia de signo por primera vez, de tal manera que por ejemplo en el semientorno derecho de $t_o (t_o, t_o+\delta)$ sea $V(t) < 0$, entonces se tendrá:

$$(3.4) \qquad V(t_o) = V_o(t_o) - \int_0^{t_o} \frac{F(V(\tau))}{\sqrt{t_o-\tau}}\, d\tau = 0$$

$$(3.5) \qquad V(t_1) = V_o(t_1) - \int_0^{t_1} \frac{F(V(\tau))}{\sqrt{t_1-\tau}}\, d\tau < 0 \quad , \quad [t_1 \in (t_o, t_o+\delta)]$$

restando (3.5) de (3.4) se tiene

$$(3.6) \qquad V(t_o) - V(t_1) > 0$$

y como por hipótesis es $V_o(t_o) - V_o(t_1) \leqslant 0$, de (3.6) se sigue que

$$(3.7)\qquad \int_0^{t_1} \frac{F}{\sqrt{t_1-\tau}}\,d\tau > \int_0^{t_o} \frac{F}{\sqrt{t_o-\tau}}\,d\tau$$

siendo por otra parte

$$\int_0^{t_1} \frac{F}{\sqrt{t_1-\tau}}\,d\tau = \int_0^{t_o} \frac{F}{\sqrt{t_1-\tau}}\,d\tau + \int_{t_o}^{t_1} \frac{F}{\sqrt{t_1-\tau}}\,d\tau$$

se tendrá que

$$(3.8)\qquad \int_0^{t_o} \frac{F}{\sqrt{t_1-\tau}}\,d\tau + \int_{t_o}^{t_1} \frac{F}{\sqrt{t_1-\tau}}\,d\tau > \int_0^{t_o} \frac{F}{\sqrt{t_o-\tau}}\,d\tau$$

como

$$\int_0^{t_o} \frac{F}{\sqrt{t_o-\tau}}\,d\tau > \int_0^{t_o} \frac{F}{\sqrt{t_1-\tau}}\,d\tau ,$$

de (3.8) se sigue que debe ser

$$(3.9)\qquad \int_{t_o}^{t_1} \frac{F}{\sqrt{t_1-\tau}}\,d\tau > 0$$

estando esta última desigualdad en contradicción con el hecho de que en (t_o,t_1) es $F < 0$.

En consecuencia, se tendrá $V > 0$ para todo $t \in [0,T]$ y por consiguiente será $F > 0$. El LEMA 2 queda así demostrado.

LEMA 3. *Sea* $u(x,t)$ *solución de* (§). *Si además de* (a), (b), (c) *se tiene* $V_o(0) > 0$, $V.F(V) > 0$, $h'(x) \geqslant 0$. *Entonces resulta* $V(t) > 0$, *para todo* $t \in [0,T]$ *y* $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t) = 0$ *uniformemente en* x.

Demostración. Introducimos $w(x,t)$ como $w(x,t) = u_x(x,t)$; ahora para w se puede escribir el problema:

$$(3.10)\qquad \begin{cases} w_{xx} - w_t = 0 \\ w_x(0,t) = F(w(0,t)) \\ w(x,0) = h'(x) \end{cases}$$

Por hipótesis se tiene $w(0,0) > 0$ y por continuidad será $w(0,t) > 0$ para $t \in [0,\tilde{t})$ para algún $\tilde{t} > 0$ suficientemente pequeño.

Supongamos ahora que $w(0,\tilde{t}) = 0$ y en consecuencia por hipótesis será $F(w(0,\tilde{t})) = 0$. Por otra parte, por el Teorema de Friedman-Vyborny [3] sobre máximo en la frontera se tendrá

$$w_x(0,\tilde{t}) > 0$$

lo que está en contradicción con la segunda ecuación de (3.10). Se concluye por lo tanto que debe ser $V(t) > 0$.

Recordando ahora que $u(x,t)$ se puede representar como

$$u(x,t) = u_o(x,t) - \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) F(V(\tau))d\tau$$

donde

$$u_o(x,t) = \int_0^\infty K(x,t,\xi,0)h(\xi)d\xi$$

se sigue que $\quad u(x,t) \leqslant u_o(x,t)$

y como se supone que $h'(x) \geqslant 0$, del principio del máximo se sigue que

$$u_x(x,t) \geqslant 0 \quad \text{en} \quad D_T$$

y por consiguiente se tendrá

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{en} \quad D_T$$

Hemos entonces establecido la siguiente desigualdad

$$0 \leqslant u(x,t) \leqslant u_o(x,t)$$

Observando finalmente que siendo $h(x)$ acotada se tendrá que $u_o(x,t) \to 0$ $(t \to +\infty)$, y en consecuencia se concluye que $u(x,t) \to 0$ $(t \to +\infty)$, lo que completa la demostración del LEMA 3.

AGRADECIMIENTO. El autor expresa su agradecimiento al Dr.Mario Primicerio del Instituto Matemático "Ulisse Dini" de la Universidad de Florencia (Italia) quien sugirió los problemas analizados en este artículo, en oportunidad en que el autor desarrollaba en el precitado Instituto temas de la Beca Externa de Iniciación otorgada por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina.

REFERENCIAS

[1] J.R.CANNON, *Some Heat Conduction Problems*. The University of Texas at Austin, TX 78712.

[2] R.COURANT, D.HILBERT, *Method of Math.Physics*. Vol.II, Int. Publ. N.Y. 1962.

[3] A.FRIEDMAN, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.I. (1964).

Facultad de Ciencias Tecnológicas
Universidad Nacional de Salta
Buenos Aires N°177
(4.400) SALTA.

Recibido en abril de 1985.
Versión corregida noviembre de 1985.