Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 40, 1996.

GEOMETRIA DIFERENCIAL DE SISTEMAS DINAMICOS SOBRE C*-ALGEBRAS

Gustavo Piñeiro†

ABSTRACT.

Let's call *SD(G,M)* the space of dynamical systems from an abelian locally compact group G over an injective W*-algebra M. Let's consider the natural action from *Aut(M)* over *SD(G,M)*. The first objective of this work consists of, under suitable conditions, defining in *SD(G,M)* a structure of homogeneous reductive space.

The set $U(G, M)$ containing the unitaries representations of G on M admits a bijection with the space of $\star$-representations of $C^\star$(G) on M. This last space will be called R$(C^\star(G), M)$. The second objective of this work consists of answering the following question, which it was asked in[**ACS 2**]: which topology does this bijection induce in $U(G, M)$? The answer will let us define in $U(G, M)$ a structure of reductive homogeneous space.

INTRODUCCION.

Un sistema dinámico es una terna (M,G,α), donde M es una C*-álgebra, G es un grupo localmente compacto (que consideraremos abeliano) y α es una representación de G en el grupo *Aut(M)* de $\star$-automorfismos de M tal que para cada $x \in M$ la aplicación $g \to \alpha_g(x)$ es continua. Si M es una W*-álgebra entonces la función $g \to \alpha_g(x)$ deberá ser σ-débil continua. Indicaremos con *SD(G,M)* al conjunto de los sistemas dinámicos del grupo G en el álgebra M.

Los sistemas dinámicos aparecen de manera natural en el estudio de diversas ramas de la Matemática y la Física; en particular, por ejemplo, en Mecánica Cuántica son estudiados sistemas dinámicos sobre C*-álgebras. Paralelamente G. Corach, H. Porta

† Supported by CONICET (Argentina)

y L. Recht desarrollaron con éxito una teoría geométrica inspirada en el espacio de proyectores en una $C^\star$-álgebra. Tal teoría, consistente en el estudio de la estrucura de espacio homogéneo de dimensión infinita, se aplica a una extensa lista de espacios, como las medidas espectrales, representaciones de grupos compactos, operadores simétricos, operadores positivos y muchos otros (véase **[CPR 1]**, **[CPR 2]**, **[ARS]**, **[MR]**, **[ACS 1]** y **[ACS 2]**).

Es nuestro interés incorporar a esta extensa lista de espacios donde es definible una estructura homogénea reductiva al conjunto $SD(G, M)$ de los sistemas dinámicos de un grupo abeliano localmente compacto G en un álgebra de von Neumann inyectiva M. Con este fin vamos a estudiar la acción de $Aut(M)$ en $SD(G,M)$ definida por $T\star\alpha_k = T\alpha_k T^{-1}$ si $T \in Aut(M)$, $\alpha \in SD(G, M)$ y $k \in G$, o también esta misma acción restringida al conjunto $In(M)$ de los $\star$-automorfismos interiores de M.

La pregunta básica que nos hacemos, entonces, es bajo qué condiciones es posible definir en $SD(G, M)$ una estructura de espacio homogéneo. Si pudiésemos ver a $SD(G, M)$ en el contexto de un espacio de Banach, entonces habremos dado un paso importante en el camino hacia obtener una respuesta a la pregunta; pues los espacios de Banach son el hábitat natural de los objetos diferenciables.

Un tal primer paso es llevado a cabo en la primera sección, donde se establece la inclusión de $SD(G, M)$ en un espacio de Banach conveniente. En particular este paso determinará la topología a considerar en $SD(G, M)$.

Nuestra pregunta básica será respondida para el caso de grupos finitos. Este ejemplo, a primera vista puede parecer de poco interés, sin embargo será la clave que nos permitirá estudiar los $\star$-automorfismos de M de orden finito. Una consecuencia de este estudio será una demostración de que los $\star$-automorfismos de orden 2 admiten una estructura de espacio homogéneo y que además constituyen un subconjunto abierto de $Aut(M)$.

Algunos de los ejemplos más importantes entre los sistemas dinámicos ocurren cuando el grupo G es el grupo $\mathbb{Z}$ de los números enteros. En la segunda sección nos ocupamos de este ejemplo. Estudiamos la acción dada por $Aut(M)$. En esta sección se demuestra que si $C_1, C_2 \in Aut(M)$ son automorfismos centarles distintos entonces las órbitas de los sistemas dinámicos inducidos por C_1 y C_2 distan en más de $\frac{1}{4}$.

La última sección no está dedicada a los sistemas dinámicos sino a un breve estudio de las representaciones unitarias de un grupo G localmente compacto y abeliano en un álgebra de von Neumann M. El objetivo es responder a una pregunta que había quedado planteada en **[ACS 2]**. Explicaremos brevemente la naturaleza de la pregunta. El conjunto $U(G,M)$ de las representaciones unitarias de G en M admite una biyección natural con el conjunto R$(C^\star(G),M)$ de las $\star$-representaciones de $C^\star(G)$ en *M*. La pregunta se refiere a cuál es la topología inducida por esta biyección en $U(G,M)$; su respuesta permitirá considerar en $U(G,M)$ una estructura de espacio homogéneo.

Este trabajo consta de cinco secciones; en la primera, dados una C*-álgebra M y un grupo G localmente compacto y abeliano, consideraremos el conjunto *SD(G,M)*. El objetivo será determinar para el mismo un contexto adecuado, que permita definir en él una estructura de fibrado principal. En particular, responderemos a la pregunta de cuál es la topología que corresponde considerar en el conjunto.

En la segunda parte tomamos el caso particular en que $G = \mathbb{Z}$ y, aplicando a $SD(\mathbb{Z},M)$ los resultados de la sección previa estudiamos las órbitas de los sistemas dinámicos de la forma $n \to C^n$ donde $n \in \mathbb{Z}$ y $C \in Aut(M)$ es un automorfismo central. Para ello se define en *Aut(M)* una nueva métrica d' y se estudia el homeomorfismo resultante entre $SD(\mathbb{Z},M)$ y *(Aut(M),d')*.

La tercera sección está dedicada a estudio de *SD(G,M)* en el caso en que G es un grupo finito. Fijado $\alpha \in SD(G,M)$ consideramos la aplicación $\Pi_\alpha : Aut(M) \to SD(G,M)$, definida por $\Pi_\alpha(T) = T\star\alpha$ y estudiamos los objetos diderenciales inducidos por ella (esta sección está inspirada en [**MR**], sección 12).

En la cuarta parte se aplican los resultados obtenidos en la sección previa para efectuar un estudio de la estructura de los automorfismos de *Aut(M)* de orden 2; se discutirá particularmente la existencia de secciones locales continuas para la acción Π_α. Una conclusión resultante de este setudio será que el conjunto de $\star$-automorfismos de orden 2 es abierto en *Aut(M)*.

La última sección responde a la pregunta planteada en [**ACS 2**] acerca de la topología a considerar en el conjunto de representaciones unitariaas de un grupo localmente compacto y abeliano G en una $W^\star$-álgebra M. El objetivo de obtener un homeomorfismo con el espacio $R(C^\star(G),M)$ de las $\star$-representaciones de $C^\star(G)$ en M. Este conjunto tiene, en virtud de [**ACS 2**] una estructura de espacio homogéneo; el homeomorfismo indicado permite llevar esa estructura a $U(G,M)$.

1. SISTEMAS DINAMICOS.

Sean M una W*-álgebra con predual separable, G un grupo abeliano localmente compacto. Llamaremos *SD(G,M)* al conjunto de los sistemas dinámicos de G en *M*; sea

$\alpha \in SD(G,M)$ un sistema dinámico. Notaremos *M(G)* al conjunto de las medidas complejas definidas en G y *L(M)* al conjunto de los operadores continuos de M.

Proposición 1.1:

Si α es un sistema dinámico de G en M y $\mu \in M(G)$ entonces para cada $x \in M$ existe un único elemento de M, que llamaremos $\tilde{\alpha}_\mu(x)$ caracterizado por la siguiente propiedad:

$$\Phi(\tilde{\alpha}_\mu(x)) = \int_G \Phi(\alpha_g(x))d\mu(g) \text{ para todo } \mu \in M(G), \Phi \in M_\star$$

Queda así definida una aplicación $\tilde{\alpha}_\mu : M \to M$ que verifica las siguientes propiedades:

i) Para todo $\mu \in M(G)$, $\tilde{\alpha}_\mu$ es un operador σ-débil continuo de M.

ii) $\tilde{\alpha}_{\mu\star\nu} = \tilde{\alpha}_\mu \tilde{\alpha}_\nu \quad \forall \nu, \mu \in M(G)$.

iii) $\| \tilde{\alpha}_\mu \| \leq \| \mu \| \quad \forall \mu \in M(G)$.

iv) $\tilde{\alpha}_\mu(x^\star) = \tilde{\alpha}_{\overline{\mu}}(x)^\star$ *donde* $\overline{\mu}(\Delta) = \overline{\mu(\Delta)}\ \forall \Delta \subset G$.

v) $\tilde{\alpha}_{\delta_{g+h}} = \tilde{\alpha}_{\delta_g}\tilde{\alpha}_{\delta_h}$ *para todo* $g, h \in G$.

vi) $\tilde{\alpha}_{\delta_g}(xy) = \tilde{\alpha}_{\delta_g}(x)\tilde{\alpha}_{\delta_g}(y)$ *para todo* $g \in G; x, y \in M$.

vii) $\int_G \Phi(\tilde{\alpha}_{\delta_g}(x))d\mu(g) = \Phi(\tilde{\alpha}_\mu(x))$ *para todo* $\mu \in M(G)$.

Los dos primeros puntos pueden resumirse diciendo que $\tilde{\alpha}$ es un homomorfismo de álgebras de $M(G)$ en el álgebra $L_\sigma(M)$ de operadores σ-débiles continuos de M.

Recíprocamente si $\tilde{\alpha} : M(G) \to L(M)$ verifica las siete propiedades anteriores y definimos $\alpha : G \to Aut(M)$ por $\alpha_g = \tilde{\alpha}_{\delta_g}$; entonces α es un sistema dinámico.

Demostración:

Sea α un sistema dinámico de G en M, μ una medida compleja en G y $x \in M$; la demostración de la existencia de $\tilde{\alpha}_\mu(x)$ y de que se verifican las tres primeras propiedades, puede encontrarse en **[S]**, Proposition 3.2.2.

Para demostrar iv basta probar que $\Phi(\tilde{\alpha}_\mu(x^\star)) = \Phi(\tilde{\alpha}_{\overline{\mu}}(x)^\star)$ cualquiera sea $\Phi \in M_\star$. En efecto:

$$\begin{aligned}\Phi(\tilde{\alpha}_\mu(x^\star)) &= \int_G \Phi(\alpha_g(x^\star))d\mu(g) = \int_G \Phi(\alpha_g(x)^\star)d\mu(g) = \int_G \overline{\Phi_c(\alpha_g(x))}d\mu(g) \\ &= \overline{\int_G \Phi_c(\alpha_g(x))d\overline{\mu}(g)} = \overline{\Phi_c(\tilde{\alpha}_{\overline{\mu}}(x))} = \Phi(\tilde{\alpha}_{\overline{\mu}}(x)^\star)\end{aligned}$$

Donde $\Phi_c(y) = \overline{\Phi(y^\star)}\ \forall y \in M$.

La propiedad v es consecuencia inmediata de iii. Las dos restantes propiedades son consecuencia de:

$$\Phi(\tilde{\alpha}_{\delta_g}(x)) = \int_G \Phi(\alpha_h(x))d\delta_g(h) = \Phi(\alpha_g(x))$$

De donde se deduce que $\tilde{\alpha}_{\delta_g} = \alpha_g$.

Recíprocamente; sea $\tilde{\alpha} : M(G) \to L(M)$ que verifique i – vii, si se define $\alpha_g = \tilde{\alpha}_{\delta_g}$ $\forall g \in G$; es inmediato que α_g es un sistema dinámico. •

A partir de la proposición 1.1 podemos definir una aplicación Θ que a cada sistema dinámico α le asigne un operador $\Theta(\alpha) = \tilde{\alpha} \in L(M(G).L_\sigma(M))$, que verifica i – vii, según la siguiente fórmula:

$$\Phi(\Theta(\alpha)_\mu(x)) = \int_G \Phi(\alpha_g(x))d\mu(g) \text{ para todo } \mu \in M(G), \Phi \in M_\star$$

Recíprocamente, dada una aplicación $\tilde{\alpha} \in L(M(G).L_\sigma(M))$ que verifique i – vii de la proposición podemos definir un sistema dinámico $\tilde{\Theta}(\tilde{\alpha}) = \alpha$ según la siguiente fórmula: $\tilde{\Theta}(\tilde{\alpha})_g = \tilde{\alpha}_{\delta_g}$.

Veamos que las funciones Θ y $\tilde{\Theta}$ son una la inversa de la otra. En efecto, si α un sistema dinámico, entonces probemos que: $\tilde{\Theta}\Theta(\alpha)_g = \alpha_g$.

Para ello hay que verificar que $\Theta(\alpha)_{\delta_g} = \alpha_g$, esto a su vez se deduce de lo siguiente:

$$\Phi(\Theta(\alpha)_{\delta_g}(x)) = \int_G \Phi(\alpha_h(x))d\delta_g(h) = \Phi(\alpha_g(x)) \; \forall x \in M, \forall \Phi \in M_\star$$

Para completar la demostración hay que probar que: $\Theta\tilde{\Theta}(\tilde{\alpha})_\mu = \tilde{\alpha}_\mu$.

Es decir, queremos probar que $\Phi(\Theta\tilde{\Theta}(\tilde{\alpha})_\mu(x)) = \Phi(\tilde{\alpha}_\mu(x))$ $\forall x \in M, \forall \Phi \in M_\star$. En efecto:

$$\Phi(\Theta\tilde{\Theta}(\tilde{\alpha})_\mu(x)) = \int_G \Phi(\tilde{\Theta}(\tilde{\alpha})_g(x))d\mu(g) = \int_G \Phi(\tilde{\alpha}_{\delta_g}(x))d\mu(g) = \Phi(\tilde{\alpha}_\mu(x))$$

Definición 1.2: *Si $\alpha_n, \alpha \in SD(G,M)$ entonces diremos que $\alpha_n \to \alpha$ uniformemente si y sólo si $\forall \epsilon > 0$ $\exists m \in I\!N$ tal que $\| \alpha_n(g) - \alpha(g) \| < \epsilon$ para todo $n \geq m$, $g \in G$ donde $\alpha(g) = \alpha_g$ y la norma se entiende tomada en $Aut(M) \subset L(M)$.*

Veremos a continuación que la topología inducida por esta convergencia es la que debemos considerar en *SD(G,M)* para que la biyección sea un homeomorfismo.

Proposición 1.3:

Con las notaciones anteriores; $\tilde{\alpha}_n \to \tilde{\alpha}$ *en norma de* $L(M(G), L(M))$ *si y sólo si* $\alpha_n \to \alpha$ *uniformemente.*

Demostración:

Supongamos que $\alpha_n \to \alpha$ uniformemente y sean $x \in M$ y $\Phi \in M_\star$ tales que $\| x \| \leq 1$ y $\| \Phi \| \leq 1$. Sea $m \in I\!N$ tal que $\| \alpha_n(g) - \alpha(g) \| < \epsilon$ para todo $n \geq m$, $g \in G$.
Entonces $|\Phi((\tilde{\alpha}_n(\mu) - \tilde{\alpha}(\mu))x)| \leq \int_G \| \alpha_n(g)x - \alpha(g)x \| \, d|\mu|(g) \leq \epsilon \| \mu \| \quad \forall m \leq n$.
Recíprocamente si $\tilde{\alpha}_n \to \tilde{\alpha}$ según la norma de *L(M(G),L(M))* entonces:

$$\| \alpha_n(g) - \alpha(g) \| = \| \tilde{\alpha}_n(\delta_g) - \tilde{\alpha}(\delta_g) \| \leq \| \tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha} \| \| \delta_g \| \leq \| \tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha} \| .$$

De donde se deduce que $\alpha_n \to \alpha$ uniformemente. •

La conclusión que se extrae de ambas proposiciones es que *SD(G,M)* es homeomorfo al subconjunto de los operadores de *L(M(G),L(M))* que verifican las propiedades i – vii de la proposición 1.1. Esto nos permite de manera natural considerar a *SD(G,M)* como subconjunto de *L(M(G),L(M))*.

De esta manera hemos colocado a *SD(G,M)* en el contexto de un espacio de Banach (que posee una estructura natural de variedad diferencial).

Queda pendiente el estudio de bajo qué condiciones el subconjunto de *L(M(G),L(M))* que verifica i – vii es una subvariedad en la que puede definirse una estructura de fibrado principal.

La acción natural a considerar en *SD(G,M)* es la acción dada por los unitarios de M del siguiente modo: $u\star\alpha_g = Ad(u)\alpha_g Ad(u^\star)$. Donde $u \in M$ es unitario y $Ad(u)x = uxu^\star$.
Es posible también considerar una acción desde *Aut(M)*; $T\star\alpha_g = T\alpha_g T^{-1} \ \forall T \in Aut(M)$.

Cualquiera de ambas acciones se extiende al subconjunto de *L(M(G),L(M))* que, según la proposición 1.1, es homeomorfo a *SD(G,M)*.

2. SISTEMAS DINAMICOS ENTEROS.

Según las notaciones de la sección anterior consideremos el conjunto $SD(\mathbb{Z}, M)$, donde $\mathbb{Z}$ indica el conjunto de los números enteros y M un álgebra de von Neumann inyectiva con predual separable actuando en un espacio de Hilbert H. Consideremos en $SD(\mathbb{Z}, M)$ la métrica $\mathrm{d}(\alpha, \beta) = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \| \alpha_n - \beta_n \|_{L(M)}$.

Esta métrica está bien definida ya que, por ejemplo, por la propiedad iii de la proposición 1.1 vale que $\| \rho_n \| = \| \tilde{\rho}_{\delta_n} \| \leq \| \delta_n \| \leq 1 \ \forall \rho \in SD(\mathbb{Z}, M)$; además induce en $SD(\mathbb{Z}, M)$ la misma topología que la considerada en la sección anterior para los sistemas dinámicos definidos en grupos localmente compactos y abelianos.

Definamos ahora en *Aut(M)* una nueva métrica d'(A,B) $= \sup_{n\in\mathbb{Z}} \| A^n - B^n \|$.
Existe una aplicación natural $\Gamma : SD(\mathbb{Z}, M) \to Aut(M)$ definida como $\Gamma(\alpha) = \alpha_1$.

Lema 2.1:

Adoptemos las notaciones anteriores y consideremos en Aut(M) la métrica d'. Entonces la aplicación $\Gamma : SD(\mathbb{Z}, M) \to Aut(M)$ *es una isometría suryectiva.*

Demostración:

Si $\alpha \in SD(\mathbb{Z}, M)$ entonces $\alpha_n = (\alpha_1)^n$, por lo tanto d'$(\Gamma\alpha, \Gamma\beta) = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \| \alpha_1^n - \beta_1^n \| =$ d(α, β). La suryectividad resulta de que, dado $A \in Aut(M)$, si definimos $\alpha_n = A^n$, entonces $\alpha \in SD(\mathbb{Z}, M)$ y $\Gamma(\alpha) = A$.•

De las dos acciones que pueden considerarse en $SD(\mathbb{Z}, M)$ queremos considerar aquella definida desde *Aut(M)*; $T\star\alpha_n = T\alpha_n T^{-1}$ $\forall T \in Aut(M)$.

A fin de dotar a *Aut(M)* de una estructura diferencial, considerémoslo como el espacio de las $\star$-representaciones de M sobre sí mismo. Puesto que M es una W*-álgebra inyectiva, podemos aplicar los resultados de [**ACS 1**] y [**ACS 2**], que nos permiten definir en $Aut(M)$ una estructura de espacio homogéneo.

Además, como $(T\star\alpha)_n = T\alpha_n T^{-1} = (T\alpha_1 T^{-1})^n$ $\forall T \in Aut(M), \alpha \in SD(\mathbb{Z}, M), n \in \mathbb{Z}$; entonces la acción de *Aut(M)* en $SD(\mathbb{Z}, M)$ se traduce, vía Γ, en la acción de *Aut(M)* sobre símismo dada por la conjugación; $T\star A = TAT^{-1}$ $\forall T, A \in Aut(M)$. Se trata entonces de estudiar la estructura de *Aut(M)* con la métrica d$'$ y la acción recién indicada.

En esta sección vamos a dar un primer paso para el estudio de esta estructura, estableciendo un hecho y una conjetura acerca de las órbitas inducidas por la acción de conjugación. Recordemos las notaciones de la sección anterior; si $u \in M$ es unitario, llamaremos $Ad(u) \in Aut(M)$ a la aplicación definida por $Ad(u)x = uxu^\star$ $\forall x \in M$.

Lema 2.2:

Sean $i = id_{L(H)}$, $u \in L(H)$ *unitario y* $Ad(u) \in L(L(H))$ *tal que* $\| (Adu)^n - i \| \leq \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$. *Entonces* $Ad(u) = i$.

Demostración:

Si $\gamma = Ad(u)$ y c pertenece a la cápsula convexa cerrada del espectro de u, que indicaremos $\overline{co}(sp(u))$, entonces $|c| \geq \frac{1}{2}(4 - \| \gamma - i \|^2)^{\frac{1}{2}}$ (véase [**KR**], 10.5.67 - 10.5.68 - 10.5.69). Entonces, como $\| \gamma^n - i \| \leq \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ se deduce que $|c| \geq \frac{\sqrt{5}}{4} > 0,96$ $\forall c \in \overline{co}(sp(u^n))$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Multiplicando por un número complejo de módulo 1 conveniente, podemos suponer que $1 \in sp(u)$. La condición $|c| > 0,96\ \forall c \in \overline{co}(sp(u^n))\ \forall n \in \mathbb{Z}$ dice primeramente que para todo $n \in \mathbb{Z}$ el espectro de u^n está contenido en un arco de circunferencia de longitud 0,57 simétrico alrededor de 1.

Supongamos que $sp(u) \neq \{1\}$ y sea $\lambda \in sp(u) - \{1\}$. Vale que $\{\lambda^n, 1\} \subset sp(u^n)\ \forall n \in \mathbb{Z}$; pero, tomando una potencia de λ conveniente, $\{\lambda^n, 1\}$ quedará fuera del arco de circunferencia antes indicado; llegamos así a una contradicción. Luego $sp(u) = \{1\}$.

Como u es un operador normal de $L(H)$ entonces para toda función f continua en el espectro de u vale que $\| f(u) \| = \sup_{\lambda \in sp(u)} |f(\lambda)|$. Tomando $f(t) := t - 1$ resulta que $u = I$ y entonces $Ad(u) = i$.•

Observación 2.3: El lema 2.2 es válido aún, si reemplazamos $L(H)$ por M.

Corolario 2.4:

La aplicación identidad de M, $i \in Aut(M)$, es un punto aislado en $(Aut(M), d')$.

Demostración:

Sea $A \in Aut(M)$ tal que $d'(A, i) < \frac{1}{4}$; luego $\| A^n - i \| < \frac{1}{4}\ \forall n \in \mathbb{Z}$. Como en particular $\| A - i \| < 2$, entonces, por **[KR]**, 10.5.73 o **[P]**, Proposition 8.7.9, existe $u \in M$ unitario tal que $A = Ad(u)$. Por el lema 2.2 se deduce que $A = i$. Luego

$$\left\{ A \in Aut(M) : d'(A, i) < \frac{1}{4} \right\} = \{i\} \ \bullet$$

Definición 2.5: *Diremos que $C \in Aut(M)$ es central si $AC = CA\ \forall A \in Aut(M)$.*

Teorema 2.6

Si $C \in Aut(M)$ es central entonces C es punto aislado de $(Aut(M), d')$. Más aún

$$\left\{ A \in Aut(M) : d'(A, C) < \frac{1}{4} \right\} = \{C\}$$

Demostración:

Sea $A \in Aut(M)$ tal que $d'(A, C) < \frac{1}{4}$, entonces $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$\| A^n - C^n \| = \| C^n(C^{-n}A^n - i) \| = \| C^{-n}A^n - i \| = \| (C^{-1}A)^n - i \| < \frac{1}{4}$$

Aplicando el corolario 2.4 se deduce que $C^{-1}A = i$.•

Observemos que si $C \in Aut(M)$ es central entonces para todo $T \in Aut(M)$ vale que $TCT^{-1} = C$, es decir la órbita de C es exactamente $\{C\}$. Si $A \in Aut(M)$ llamemos $Or(A)$ a la órbita de A; $Or(A) = \{TAT^{-1} : T \in Aut(M)\}$.

El teorema 2.6 puede refrasearse diciendo que si C es central y $A \in Aut(M), A \neq C$ entonces la distancia (según d') entre $Or(C)$ y $Or(A)$ es mayor o igual que $\frac{1}{4}$. Nuestra conjetura es que existe un número constante $k_0 > 0$ tal que si $A, B \in Aut(M)$ son tales que $Or(A) \neq Or(B)$, entonces la distancia entre $Or(A)$ y $Or(B)$ es mayor o igual que un número constante k_0.

3. SISTEMAS DINAMICOS EN GRUPOS FINITOS.

Sea G un grupo abeliano finito, indicaremos por $|G|$ al cardinal de G. Sea M un álgebra de von Neumann inyectiva actuando en un espacio de Hilbert separable H y sea $\alpha : G \to Aut(M)$ un sistema dinámico. En particular $\alpha_{k+j} = \alpha_k \alpha_j \ \forall k, j \in G$.

Notación: Indicaremos con $C(G)$ al conjunto $\mathbb{C}^G$, de todas las funciones de G al conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos.

Observación 3.1: Puesto que G es finito entonces es obvio que $C(G) = L^1(G)$ tomando en G su medida de Haar. En este contexto la convolución de dos funciones $f, g \in C(G)$ queda definida por $f \star g(j) = \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} f(k) g(j-k) \ \forall j \in G$.

Tomaremos como norma en C(G) la siguiente: $\| f \|_{C(G)} := \sum_{k \in G} |f(k)|$.

Por razones puramente de comodidad en la escritura (que serán evidentes en el teorma 3.8) y sin que esto represente una diferencia esencial omitimos en la definición de $\| f \|_{C(G)}$ el factor $\frac{1}{|G|}$, que era dado a esperar delante de la sumatoria.

Vamos ahora a seguir una línea argumental similar a aquella desarrollada en la sección 1, con el fin de dotar a $SD(G,M)$ de una estructura diferencial. Esencialmente vamos a dar una versión finita de las proposiciones 1.1 y 1.2. Dado $\alpha \in SD(G, M)$ queda definida una aplicación $\tilde{\alpha} : C(G) \to L(M)$ dada por la siguiente fórmula: $\tilde{\alpha}_f = \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} f(k) \alpha_k \ \forall f \in C(G)$.

Proposición 3.2:

Si $\alpha \in SD(G, M)$ y $\tilde{\alpha} : C(G) \to L(M)$ es la aplicación antes definida, entonces $\tilde{\alpha}$ verifica:

i) $\tilde{\alpha}_{f \star g} = \tilde{\alpha}_f \tilde{\alpha}_g$.

ii) $\tilde{\alpha}_f(x^\star) = \tilde{\alpha}_{\overline{f}}(x)^\star \ \forall x \in M$, *donde* $\overline{f}(k) = \overline{f(k)}$.

iii) $\tilde{\alpha}_{\delta_k} \in Aut(M) \ \forall k \in G$.

iv) $\frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} f(k) \tilde{\alpha}_{\delta_k} = \tilde{\alpha}_f$.

Recíprocamente si $\beta \in L(C(G), L(M))$ ***verifica i – iv entonces existe*** $\alpha \in SD(G, M)$ ***tal que*** $\tilde{\alpha} = \beta$, ***explícitamente*** α ***está dada por la fórmula*** $\alpha_k = \beta_{\delta_k}$.

La demostración de la proposición es completamente elemental por lo que la omitimos. Queda definida una biyección entre *SD(G,M)* y el subconjunto de $L(C(G), L(M))$ dado por las propiedades i – iv. La proposición 1.3 nos dice cual es la topología a considerar en *SD(G,M)* para que la biyección resulte un homeomorfismo. Esta topología es aquella inducida por la métrica $d(\alpha, \beta) = \max_{k \in G} \| \alpha_k - \beta_k \|$.

Notación:

Indicaremos por *In(M)* al conjunto de los automorfismos interiores de M, es decir:

$$In(M) = \{T \in Aut(M) : T = Ad(u) \text{ con } u \in M \text{ unitario } \}.$$

E indicaremos por *Der(M)* al $\mathbb{R}$- espacio vectorial de las $\star$-derivaciones de M, esto es, $\Delta \in Der(M)$ si y sólo si es lineal y para todo $x, y \in M$ vale $\Delta(xy) = x\Delta(y) + \Delta(x)y$ y $\Delta(x^\star) = \Delta(x)^\star$.

Es bien sabido que toda $\star$-derivación de M es acotada.

Consideramos sobre *SD(G,M)* la acción de *In(M)* definida por $(T\star\alpha)_k := T\alpha_k T^{-1}$. La acción correspondiente sobre $\tilde{\alpha}$ es idéntica. Es fácil probar que $T\star\tilde{\alpha}$ verifica i – iv y que $T\star\tilde{\alpha} = \widetilde{T\star\alpha}$.

Como M es inyectiva entonces *In(M)* tiene una estructura diferencial natural. Por [**KR**], 10.5.63; $T \in In(M)$ si y sólo si existe $\Delta \in Der(M)$ tal que $T = e^{\Delta}$. Luego *Der(M)* es el espacio tangente natural de *In(M)*. En particular existe un proyector continuo $\mathbb{P} : L(M) \to Der(M)$.

Supongamos que $A \in L(M)$ y $\Delta = \mathbb{P}(A)$; digamos $A = \Delta + \overline{\Delta}$. Si $T \in Aut(M)$ entonces $T\Delta T^{-1} \in Der(M)$, de donde se deduce que $\mathbb{P}(TAT^{-1}) = T\mathbb{P}(A)T^{-1}$.

Dado un sistema dinámico α indicaremos a partir de ahora con la misma letra a la aplicación inducida $\alpha \in L(C(G), L(M))$ e identificaremos $\alpha_k = \alpha_{\delta_k}$.

Observación: Los cálculos efectuados en gran parte del resto de esta sección están inspirados en [**MR**].

Definición 3.3: *Dado* $\alpha \in L(C(G), L(M))$ *definimos* $\Pi_\alpha : In(M) \to L(C(G), L(M))$ *por* $\Pi_\alpha(T) = T\star\alpha$.

Notación: Llamaremos I_α al conjunto $I_\alpha := \{\Delta \in Der(M) : \Delta\alpha_k = \alpha_k\Delta \ \forall k \in G\}$.

Proposición 3.4:

Si $E_\alpha : Der(M) \to L(M)$ *se define por* $E_\alpha(\Delta) = \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} \alpha_k \Delta \alpha_{-k}$.

Entonces $E_\alpha(Der(M)) \subset I_\alpha$ *y* $E_\alpha E_\alpha = E_\alpha$.

Compárese este enunciado con [**MR**], 12.2.

Demostración:

Sean $\Delta \in Der(M)$, vamos a probar que $E_\alpha(\Delta) \in I_\alpha$, es decir que $E_\alpha(\Delta) \in Der(M)$ y que $E_\alpha(\Delta)\alpha_g = \alpha_g E_\alpha(\Delta)$ $\forall g \in G$.

Para la primera afirmación basta observar que $\alpha_k \Delta \alpha_{-k} \in Der(M)$ $\forall k \in G$ y que si $\{\Delta_k\}_{k\in G} \subset Der(M)$ entonces $\sum_{k\in G} \Delta_k \in Der(M)$. Veamos la segunda afirmación:

$$E_\alpha(\Delta)\alpha_g = \frac{1}{|G|}(\sum_{k\in G} \alpha_k \Delta \alpha_{-k})\alpha_g = \frac{1}{|G|}\sum_{k\in G} \alpha_k \Delta \alpha_{k+g} = \frac{1}{|G|}\sum_{r\in G} \alpha_{r+g} \Delta \alpha_{-r}$$
$$= \frac{1}{|G|}\alpha_g \sum_{r\in G} \alpha_r \Delta \alpha_{-r} = \alpha_g E_\alpha(\Delta).$$

Probemos finalmente que $E_\alpha E_\alpha(\Delta) = E_\alpha(\Delta)$.

$$E_\alpha E_\alpha(\Delta) = \frac{1}{|G|}\sum_{k\in G} \alpha_k E_\alpha(\Delta)\alpha_{-k} = \frac{1}{|G|}\sum_{k\in G} E_\alpha(\Delta)\alpha_k\alpha_{-k} = E_\alpha(\Delta). \quad \bullet$$

Llamemos Q al conjunto de los operadores $\beta \in L(C(G), L(M))$ que verifican i - iv de la proposición 3.2; conjunto éste que identificamos con *SD(G,M)*. Fijemos $\alpha \in Q$. Asumamos por el momento que se verifican las siguientes hipótesis; que nos permitirán suponer en Q una estructura de espacio homogéneo.

Hipótesis:

1) La acción Π_α es localmente transitiva y admite secciones locales continuas.

2) El espacio tangente a Q en α es complementado en $L(C(G), L(M))$.

Observación 3.5:

Supongamos que $T \in In(M)$ es tal que $\Pi_\alpha(T) = \alpha$; esto significa que $T\alpha_k = \alpha_k T$ $\forall k \in G$. Derivando respecto de T obtenemos que $\Delta\alpha_k = \alpha_k \Delta$ si Δ pertenece al tangente de $In(M)$ en T.

En otras palabras, si llamamos II_α al conjunto $II_\alpha = \{T \in Aut(M) : \Pi_\alpha(T) = \alpha\}$; entonces vale que $T_T(II_\alpha) = I_\alpha$. por otra parte este último conjunto, por ser imagen del proyector E_α es complementado en $Der(M)$.

Observación 3.6:

Si $\alpha \in Q$ entonces $\alpha_{f\star g} = \alpha_f \alpha_g$, derivando obtenemos que si $X \in T_\alpha(Q)$ luego $X_{f\star g} = \alpha_f X_g + X_f \alpha_g$. Además si identificamos $X_k = X_{\delta_k}$ $(k \in G)$ entonces $X_{j+k} = \alpha_j X_k + X_j \alpha_k$ $\forall k, j \in G$. Por otra parte, siendo $\alpha_k(xy) = \alpha_k(x)\alpha_k(y)$, (donde $k \in G$,

$x, y \in M$), y $\alpha(x^\star) = \alpha(x)^\star$ entonces $X_k(xy) = \alpha_k(x)X_k(y) + X_k(x)\alpha_k(y)$ y además $X_k(x^\star) = X_k(x)^\star$.

Finalmente si $\overline{\Pi}_\alpha$ es la diferencial de Π_α se tiene que $\overline{\Pi}_\alpha : Der(M) \to L(C(G), L(M))$ y $\overline{\Pi}_\alpha(\delta)f = \delta\alpha_f - \alpha_f\delta$.

Las fórmulas que definen a $\overline{\Pi}_\alpha$ y E_α pueden naturalmente extenderse a *L(M)*, indicaremos estas extensiones con las mismas letras $\overline{\Pi}_\alpha$ y E_α y haremos uso de ellas sin mencionarlo explícitamente en el teorema 3.8.

Definición 3.7:

Definimos $K_\alpha : L(C(G), L(M)) \to L(M)$ *por:* $K_\alpha(X) = \frac{1}{|G|}\sum_{r\in G} X_r\alpha_{-r}$.

Teorema 3.8:

De acuerdo con las notaciones anteriores, valen los siguientes hechos:

i) $K_\alpha(X) \in Der(M)\ \forall X \in T_\alpha(Q)$.

ii) $\overline{\Pi}_\alpha(K_\alpha(X)) = X\ \forall X \in T_\alpha(Q)$.

iii) $K_\alpha(\overline{\Pi}_\alpha(A)) = (1 - E_\alpha)(A)\ \forall A \in L(M)$.

Demostración:

Sean $x, y \in M$; demostremos primeramente la propiedad i. Ya que $X_k(x^\star) = X_k(x)^\star\ \forall x \in G$ entonces basta ver que $K_\alpha(X)(xy) = xK_\alpha(X)(y) + K_\alpha(X)(x)y$. En efecto:

$$\begin{aligned}
K_\alpha(X)(xy) &= \frac{1}{|G|}\sum_{k\in G} X_k(\alpha_{-k}(xy)) = \frac{1}{|G|}\sum_{k\in G} X_k(\alpha_{-k}(x)\alpha_{-k}(y)) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{k\in G}(\alpha_k\alpha_{-k}(x)X_k(\alpha_{-k}(y)) + X_k(\alpha_{-k}(x))\alpha_k\alpha_{-k}(y)) \\
&= xK_\alpha(X)(y) + K_\alpha(X)(x)y.
\end{aligned}$$

Para probar ii veamos que $\overline{\Pi}_\alpha(K_\alpha(X))_j = X_j\ \forall j \in G$.

$$\begin{aligned}
\overline{\Pi}_\alpha(K_\alpha(X))_j = K_\alpha(X)\alpha_j - \alpha_j K_\alpha(X) &= \frac{1}{|G|}\left(\sum_{k\in G} X_k\alpha_{-k+j} - \sum_{k\in G}\alpha_j X_k\alpha_{-k}\right) \\
&= \frac{1}{|G|}\left(\sum_{k\in G} X_k\alpha_{-k+j} - \sum_{k\in G}(X_{j+k} - X_j\alpha_k)\alpha_{-k}\right) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{k\in G} X_j = X_j.
\end{aligned}$$

Finalmente probemos el punto iii.

$$K_\alpha(\overline{\Pi}_\alpha(A)) = \frac{1}{|G|}\sum_{k\in G}\overline{\Pi}_\alpha(A)|_k\alpha_{-k} = \frac{1}{|G|}\sum_{k\in G}(A\alpha_k - \alpha_k A)\alpha_{-k}$$
$$= A - \frac{1}{|G|}\sum_{k\in G}\alpha_k A\alpha_{-k} = (1-E_\alpha)(A) \bullet$$

Nota:

Estudiaremos a continuación la validez de la hipótesis 2 que afirma que el espacio tangente $T_\alpha(Q)$ es complementado en *L(C(G),L(M))*.

Proposición 3.9:

L(C(G),L(M)) es isométricamente isomorfo a $L(M)^{|G|} := L(M)\oplus\cdots\oplus L(M)$ *(|G| sumandos).*

Demostración:

Si $\underline{A}\in L(M)^{|G|}$; $\underline{A} = (A_1,\ldots,A_{|G|})$ entonces definimos: $\| \underline{A} \| := \max_{k\in G} \| A_k \|$.

Sea $\Gamma : L(M)^{|G|} \to L(C(G),L(M))$ definida por: $\Gamma(\underline{A})f := \sum_{k\in G} f(k)A_k$.

Entonces $\| \Gamma(\underline{A})f \| = \| \sum_{k\in G} f(k)A_k \| \leq \| \underline{A} \| \sum_{k\in G}|f(k)| = \| \underline{A} \| \| f \|_{C(G)}$.

Se deduce que $\| \Gamma(\underline{A}) \| \leq \| \underline{A} \|$. La igualdad de las normas resulta de considerar que $\| \delta_k \| = 1$ y que $\Gamma(\underline{A})\delta_k = A_k$. Asimismo esta observación dice que si $X \in L(C(G),L(M))$ entonces $\Gamma^{-1}(X) = (X_{\delta_k})_{k\in G}$. $\bullet$

Observación 3.10:

Existe una inclusión natural de *L(M)* en $L(M)^{|G|}$; por lo que podemos considerar a $Der(M) \subset L(M) \subset L(M)^{|G|}$. Además el teorema 3.8 nos permite asumir que $T_\alpha(Q) \subset L(M)^{|G|}$. De este modo hemos podido colocar a los espacios tangentes de *In(M)* y *SD(G,M)* en el contexto de un mismo espacio de Banach.

Observación 3.11:

Diremos que $X \in L(C(G),L(M))$ verifica la propiedad P si valen las tres siguientes afirmaciones:

i) $X_{j+k} = \alpha_j X_k + X_j\alpha_k \ \forall k,j\in G$;

ii) $X_k(xy) = \alpha_k(x)X_k(y) + X_k(x)\alpha_k(y) \ \forall k\in G\ \forall x,y\in M$;

iii) $X_k(x^\star) = X_k(x)^\star \ \forall x \in M$.

La observación 3.5 nos dice que Si $X \in T_\alpha(Q)$ entonces X verifica la propiedad P. Veremos que también vale la recíproca.

Proposición 3.12:

Sea $X \in L(C(G), L(M))$; entonces $X \in T_\alpha(Q)$ si y sólo si X verifica la propiedad P. Además si $X \in T_\alpha(Q)$ entonces existe $\Delta \in Der(M)$ tal que $X_k = \Delta\alpha_k - \alpha_k\Delta$.

Demostración:

Sea $X \in L(C(G), L(M))$ que verifica la propiedad P. Es fácil probar que en ese caso $K_\alpha(X) \in Der(M)$ y en consecuencia $e^{tK_\alpha(X)} \in In(M)$ cualquiera sea $t \in \mathbb{R}$.

Tomemos la curva $c : \mathbb{R} \to Q$ definida por $c(t) = e^{tK_\alpha(X)} \star \alpha$. Entonces $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} c(t)_k = K_\alpha(X)\alpha_k - \alpha_k K_\alpha(X)$.

Como X verifica la propiedad P entonces es fácil ver que $\overline{\Pi}_\alpha(K_\alpha(X)) = X$; de donde se deduce que $X \in T_\alpha(Q)$ y que $X_k = K_\alpha(X)\alpha_k - \alpha_k K_\alpha(X)$ $\forall k \in G$. •

Corolario 3.13:

$T_\alpha(Q) = \{\Delta\alpha - \alpha\Delta : \Delta \in Der(M)\}$. *Donde* $(\Delta\alpha - \alpha\Delta)_k = \Delta\alpha_k - \alpha_k\Delta$.

Consideremos el caso $G = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Combinando la proposición 3.9 con el corolario 3.13 tenemos que $T_\alpha(Q)$ se identifica con el subespacio de $L(M)^2$ caracterizado por $T_\alpha(Q) = \{(0, \Delta\alpha_1 - \alpha_1\Delta) : \Delta \in Der(M)\}$.

Si $A \in L(M)$ entonces

$$A = A\alpha_1\alpha_1 = \frac{1}{2}(A\alpha_1\alpha_1 - \alpha_1 A\alpha_1 + \alpha_1 A\alpha_1 + A\alpha_1\alpha_1) = \frac{1}{2}(A - \alpha_1 A\alpha_1) + E_\alpha(A).$$

De donde se deduce que $\frac{1}{2}(A - \alpha_1 A\alpha_1) = (1 - E_\alpha)(A)$.

Por otra parte como *Der(M)* es complementado en *L(M)*, con proyector asociado $\mathbb{P}$, entonces $Der(M)\alpha_1 := \{\Delta\alpha_1 : \Delta \in Der(M)\}$ también es complementado, con proyector asociado $\overline{\mathbb{P}}(A) := \mathbb{P}(A\alpha_1)\alpha_1$.

Afirmamos además que $\mathbb{P}$ conmuta con $1 - E_\alpha$. En efecto:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(1 - E_\alpha(A)) = \mathbb{P}\left(A - \frac{1}{2}(A + \alpha_1 A\alpha_1)\right) &= \mathbb{P}(A) - \frac{1}{2}(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\alpha_1 A\alpha_1)) \\ &= \mathbb{P}(A) - \frac{1}{2}(\mathbb{P}(A) + \alpha_1\mathbb{P}(A)\alpha_1) = (1 - E_\alpha)\mathbb{P}(A)\end{aligned}$$

Análogamente se prueba que $\overline{\mathbb{P}}(1 - E_\alpha) = (1 - E_\alpha)\overline{\mathbb{P}}$ y en consecuencia $\overline{\mathbb{P}}(1 - E_\alpha)$ es un proyector.

Además si $A \in L(M)$ entonces $\mathbb{P}(A) = \Delta_0\alpha_1$ para algún $\Delta_0 \in Der(M)$ y entonces $\overline{\mathbb{P}}(1 - E_\alpha)(A) = \mathbb{P}(A) - \alpha_1\mathbb{P}(A)\alpha_1 = \Delta_0\alpha_1 - \alpha_1\Delta_0$.

Definamos $\overline{E}_\alpha \in L(L(M)^2)$ por $\overline{E}_\alpha(A,B) = (0, \overline{I\!P}(1-E_\alpha)(A))$; entonces se deduce que $\overline{E}_\alpha$ es un proyector sobre $T_\alpha(Q)$, que, por lo tanto, resulta complementado.

Observación 3.14:

Hemos visto que en el caso $G = \mathbb{Z}_2$ se verifica la segunda de las hipótesis planteadas (que $T_\alpha(Q)$ sea complementado). Veremos en la siguiente sección que en este caso también se verifica la hipótesis restante.

El proyector $\overline{E}_\alpha$ nos permite definir en Q una conexión, donde los espacios horizontales se definen como $H^\alpha := Ker(\overline{E}_\alpha)$ y cuya exponencial estará dada por: $\Phi_\alpha(X)_f = e^{K_\alpha(X)}\alpha_f e^{-K_\alpha(X)}$. Luego, las geodésicas de la conexión están dadas por: $c_{\alpha,X}(t)_f = e^{tK_\alpha(X)}\alpha_f e^{-tK_\alpha(X)}$.

Observación 3.15: Acerca de las secciones locales.

Si continuásemos con la analogía con [**MR**] podríamos intentar definir una sección local mediante la siguiente fórmula $s_\alpha(\beta) = \frac{1}{|G|}\sum_{k\in G}\alpha_k\beta_{-k}$. Es fácil verificar que si la distancia (positiva) entre α y β es suficientemente pequeña entonces $s_\alpha(\beta)$ es inversible y además $s_\alpha(\beta)\alpha_j s_\alpha(\beta)^{-1} = \beta_j\ \forall j \in G$.

Sin embargo **no** se puede tomar a s_α como sección local pues, en general, $s_\alpha \notin Aut(M)$ (no es multiplicativa). Por ejemplo, en el caso $G = \mathbb{Z}_2$; puede probarse que $s_\alpha \in Aut(M) \iff \alpha = \beta$. Este hecho muestra una diferencia esencial entre la sección previa y [**MR**].

4. AUTOMORFISMOS DE ORDEN 2.

Sea M una W*-álgebra inyectiva. Denotaremos por *Z(M)* al *centro* de M, $Z(M) = \{x \in M : xy = yx\ \forall y \in M\}$. Llamaremos por otra parte $\mathbb{Z}_2(M)$ al conjunto de los automorfismos de orden 2, es decir $\mathbb{Z}_2(M) = \{\alpha \in Aut(M) : \alpha^2 = id_M\}$. Es evidente que cada $\alpha \in \mathbb{Z}_2(M)$ induce de manera natural una representación $\tilde{\alpha} \in SD(\mathbb{Z}_2, M)$. Además si $\tilde{\alpha} \in SD(\mathbb{Z}_2, M)$ entonces $\tilde{\alpha}_1 \in \mathbb{Z}_2(M)$. Más aún, la aplicación $SD(\mathbb{Z}_2, M) \to \mathbb{Z}_2(M)$ dada por $\tilde{\alpha} \to \tilde{\alpha}_1$ es un homeomorfismo. Podemos aplicar, entonces, a $\mathbb{Z}_2(M)$ todos los resultados expuestos en la sección anterior. Veremos que en este caso la acción $\Pi_\alpha : In(M) \to \mathbb{Z}_2(M)$ admite secciones locales.

Fijemos una rama del logaritmo en $\mathbb{C}$ y sea r un número racional fijo.

La función $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $z \to z^r = e^{r log(z)}$ es analítica en 1, luego, para todo z en un entorno U_r de 1 vale $z^r = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)(z-1)^n$.

Observación 4.1:

Si $u \in M$ unitario es tal que $sp(u) \subset U_r$ entonces el desarrollo en serie antes indicado nos permite definir el elemento unitario $u^r \in M$ por $u^r = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)(u-1)^n$. Además si $\alpha \in Aut(M)$ entonces $sp(u) = sp(\alpha(u))$ y vale que $\alpha(u^r) = \alpha(u)^r$.

Observación 4.2:

Si M es una W*-álgebra y $\alpha, \beta \in Aut(M)$ verifican que $\| \alpha - \beta \| < 2$ entonces existe $u \in M$ unitario tal que $\alpha(x) = u\beta(x)u^\star$ $\forall x \in M$ y además

$$sp(u) \subset \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \text{ y } \Re z \geq \frac{1}{2}(4 - \| \alpha - \beta \|^2)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

Para una demostración de esta observación puede verse **[P]**, Proposition 8.7.9.

Lema 4.3:

Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < \delta_1 < \delta$ entonces todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$ y $\Re z \geq \frac{1}{2}(4 - \delta_1^2)^{\frac{1}{2}}$ verifica que $|z - 1| < \epsilon$.

Corolario 4.4:

De acuerdo con las notaciones anteriores, fijado un número racional r, existe $\delta = \delta(r) > 0$ que depende sólo de r tal que si $\alpha, \beta \in Aut(M)$ verifican $\| \alpha - \beta \| < \delta(r)$ entonces existe $u \in M$ unitario que cumple las siguientes condiciones

i) $\alpha(x) = u\beta(x)u^\star$ $\forall x \in M$;

ii) $sp(u) \subset U_r$.

Las demostraciones del lema 4.3 y del corolario 4.4 son completamente elementales y por lo tanto se omiten.

Sea ahora $\alpha \in \mathbb{Z}_2(M)$ y, según las notaciones del corolario 4.4, tomemos $\delta = \delta(\frac{1}{2})$. Si $\| \alpha - \beta \| < \delta$ entonces existe $u \in M$ unitario tal que $\alpha(x) = u\beta(x)u^\star$ $\forall x \in M$ y además $sp(u) \subset U_{\frac{1}{2}}$.

Proposición 4.5:

En las condiciones antes descriptas, si $v = u^{\frac{1}{2}}$ entonces $Ad(v)^{-1}\alpha Ad(v) = \beta$.

Demostración:

Considerando que $\alpha(x) = u\beta(x)u^\star$ y que $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2(M)$ entonces $\forall x \in M$:

$$x = \beta(\beta(x)) = u^\star\alpha(u^\star\alpha(x)u)u = u^\star\alpha(u^\star)\alpha^2(x)\alpha(u)u = u^\star\alpha(u^\star)x\alpha(u)u.$$

Se deduce que $\alpha(u) = u^\star c$ donde $c \in Z(M)$. Sea $v = u^{\frac{1}{2}}$. Entonces:

$$\alpha(v)^\star v = \alpha\left(u^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} u^{\frac{1}{2}} = (u^\star c)^{-\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}} = u^{\frac{1}{2}} c^{-\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}} = uc^{-\frac{1}{2}}.$$

En consecuencia $\alpha(x) = u\beta(x)u^\star = uc^{-\frac{1}{2}}\beta(x)c^{\frac{1}{2}}u^\star = \alpha(v)^\star v\beta(x)v^\star\alpha(v)$. Y entonces $\alpha(v)\alpha(x)\alpha(v)^\star = v\beta(x)v^\star$; de donde se deduce que $\alpha Ad(v)(x) = Ad(v)\beta(x)$. •

La proposición 4.5 implica la existencia de secciones locales continuas para la acción $\Pi_\alpha : In(M) \to \mathbb{Z}_2(M)$. De la demostración anterior se deduce además el siguiente hecho.

Observación 4.6: Acerca de las secciones locales

Supongamos que $\alpha, \beta \in Aut(M)$ verifican que existe $u \in M$ unitario tal que $\alpha(x) = u\beta(x)u^\star$. Si existen $v \in M$ unitario y $c \in Z(M)$ tales que $\alpha(v)^\star v = uc$ entonces el tal v verifica que $Ad(v)^{-1}\alpha Ad(v) = \beta$.

Corolario 4.7:

$\mathbb{Z}_2(M)$ es un subconjunto abierto de $Aut(M)$.

5. REPRESENTACIONES UNITARIAS.

Sea G un grupo localmente compacto y abeliano; y sea M un álgebra de von Neumann actuando en un espacio de Hilbert H. Si $\Pi : G \to L(H)$ es una representación unitaria y $\pi : C^\star(G) \to L(H)$ es la $\star$-representación no degenerada asociada a ella, entonces el rango de Π está contenido en M si y sólo si el rango de π lo está.

Recordemos que dada $\Pi : G \to L(H)$ la representación π asociada queda caracterizada por la fórmula:

$$\pi(f) = \int_G \Pi(g)f(g)dg \ \forall f \in L^1(G).$$

Recíprocamente dada $\pi : C^\star(G) \to L(H)$, la representación Π está definida por:

$$< \Pi(g)\psi, \eta > = lim_\lambda < \pi(\delta_g \star \Phi_\lambda)\psi, \eta > \quad \forall \psi, \eta \in H.$$

Donde $(\Phi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una aproximación acotada de la identidad en $L^1(G)$; $\| \Phi_\lambda \|_1 \leq K \ \forall \lambda \in \Lambda$. Para mayores detalles véase [**ACS 2**], sección 4.2 y [**P**], capítulo 7.

Si $R(C^\star(G), M)$ es el conjunto de $\star$-representaciones de $C^\star$(G) en M y *S(G,M)* es el conjunto de representaciones unitarias de G en M; sea ρ la biyección recién definida. El conjunto $R(C^\star(G), M)$ tiene una topología natural dada por la norma. La pregunta que queda planteada es qué topología hay que considerar en *S(G,M)* para que ρ resulte un homeomorfismo (cf. [**ACS 2**]). Veremos a continuación la respuesta.

Definición 5.1: *Si Π_n, Π son representaciones unitarias de G en L(M) entonces diremos que $\Pi_n \to \Pi$ uniformemente si y sólo si $\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\| \Pi_n(g) - \Pi(g) \| < \epsilon \ \forall n \geq n_0 \ \forall g \in G$.*

Proposición 5.2:

Según las notaciones anteriores; sean Π_n, $\Pi : G \to L(H)$ *representaciones unitarias y* π_n, π *las representaciones asociadas. Entonces* $\pi_n \to \pi$ *en norma de* $L(C^\star(G), L(H))$ *si y sólo si* $\Pi_n \to \Pi$ *uniformemente.*

Demostración:

Supongamos que $\pi_n \to \pi$ y sea $(\Phi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una aproximación acotada de la identidad, donde Λ es un conjunto dirigido y $\| \Phi_\lambda \|_1 \leq K \ \forall\lambda \in \Lambda$.

Entonces para cada $\psi, \eta \in H$, $g \in G$ y $\forall n \in I\!N$, $< \Pi(g)\psi, \eta > = lim_\lambda < \pi(\delta_g \star \Phi_\lambda)\psi, \eta >$ y $< \Pi_n(g)\psi, \eta > = lim_\lambda < \pi_n(\delta_g \star \Phi_\lambda)\psi, \eta >$.

Como $\pi_n \to \pi$ en norma, entonces para cada $\psi, \eta \in H$ y para cada $\lambda \in \Lambda$:

$$lim_n < \pi_n(\delta_g \star \Phi_\lambda)\psi, \eta > = < \pi(\delta_g \star \Phi_\lambda)\psi, \eta > .$$

Tenemos además que si $\psi, \eta \in H$, $\| \psi \| \leq 1, \| \eta \| \leq 1$ entonces

$$| < \pi_n(\delta_g \star \Phi_\lambda)\psi, \eta > - < \pi(\delta_g \star \Phi_\lambda)\psi, \eta > | = | < (\pi_n - \pi)(\delta_g \star \Phi_\lambda)\psi, \eta > |$$

$$\leq \| (\pi_n - \pi)(\delta_g \star \Phi_\lambda) \| \, \| \psi \| \, \| \eta \| \leq \| \pi_n - \pi \| \, \| \delta_g \star \Phi_\lambda \| \, \| \psi \| \, \| \eta \| \leq K \| \pi_n - \pi \| .$$

Nótese que la acotación anterior es independiente de λ. Por lo tanto si $\psi, \eta \in H$, $\| \psi \| \leq 1, \| \eta \| \leq 1$; $| < (\Pi_n(g) - \Pi(g))\psi, \eta > | = lim_\lambda | < \pi_n(\delta_g \star \Phi_\lambda)\psi, \eta > -$ $< \pi(\delta_g \star \Phi_\lambda)\psi, \eta > | \leq K \| \pi_n - \pi \|$.

La conclusión es que $\forall\epsilon > 0 \ \exists n_0 \in I\!N$ tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$| < (\Pi_n(g) - \Pi(g))\psi, \eta > | < \epsilon \ \forall g \in G \ \forall \| \eta \|, \| \psi \| \leq 1.$$

Recordemos que si $B \in L(H)$ es tal que $| < B\psi, \eta > | < \epsilon \ \forall \| \psi \|, \| \eta \| \leq 1$ entonces $\| B \|_{L(H)} \leq \epsilon$.

Aplicando esta observación a $B := \Pi_n(g) - \Pi(g)$ obtenemos que:

$$\forall\epsilon > 0 \ \exists n_0 \in I\!N \text{ tal que } \| \Pi_n(g) - \Pi(g) \| < \epsilon \ \forall n \geq n_0 \ \forall g \in G.$$

Para probar la recíproca, supongamos que $\Pi_n \to \Pi$ uniformemente. Dado $\epsilon > 0$ sea $n_0 \in I\!N$ tal que $\| \Pi_n(g) - \Pi(g) \| < \epsilon \ \forall g \in G$, $n \geq n_0$. Sea $f \in L^1(G)$, $\| f \|_1 \leq 1$. Si $n \geq n_0$ entonces $\| \pi_n(f) - \pi(f) \| \leq \int_G \| \Pi_n(g) - \Pi(g) \| \, |f(g)| dg \leq \epsilon \int_G |f(g)| dg = \epsilon$.
Por la densidad de $L^1(G)$ se deduce que $\| \pi_n - \pi \| \leq \epsilon \ \forall n \geq n_0$. •

Observación 5.3:

A partir de lo demostardo en [**ACS 2**], la proposición 5.2 nos permite definir en el conjunto de representaciones unitarias de G en M una estructura de espacio homogéneo.

REFERENCIAS:

[**ACS 1**] E. Andruchow, G. Corach, D. Stojanoff; A geometric characterization of nuclearity and injectivity, preprint.

[**ACS 2**] E. Andruchow, G. Corach, D. Stojanoff; The homogeneous space of representations of a nuclear C*-álgebra.

[**ARS**] E. Andruchow, L. Recht, D. Stojanoff; The space of Spectral Measures is a Homogeneous Space, Preprint (1991).

[**CPR 1**] G. Corach, H. Porta, L. Recht; The geometry of spaces of projections in C^*-algebras, Adv. in Math. (to appear).

[**CPR 2**] G. Corach, H. Porta, L. Recht; Multiplicative integrals and geometry of spaces of projections, Rev. de la UMA 34 (1988) 132 – 149.

[**KR**] R.V. Kadison and J.R. Ringrose; Fundamentals of the theory of operators algebras, Vol II, Academic Press, New York, 1986.

[**MR**] L. Mata Lorenzo, L. Recht; Infinite dimensional homogeneous reductive spaces, Acta Cient. Venez. 43 (1992), 76-90.

[**P**] G.K. Pedersen; C*-algebras and their automorphism groups, A. Press, London, 1979.

[**S**] V.S. Sunder; An invitation to von Neumann algebras, Springer Verlag, New York, 1987.

Depto. de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Recibido en Agosto 1995